

数学的帰納法によって、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left\{1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right\} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$n=1$  のとき

左辺  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

右辺  $\frac{3}{4}$  と同じ値

$n=k$  のとき

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left\{1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right\} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

この問題に  $n=k+1$  として

$$\left\{1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right\} \text{ をかけると}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left\{1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right\} \left\{1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)} \left\{1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(k+2)(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2}$$

$$= \frac{k+3}{2(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}}$$

と、同じ  $n=k+1$  のときも等式は成り立つ

よって

すべての自然数について成り立つ