関係式$a_1=3, a_n=3a_{n-1}+3^n\ (n=2,3,\cdots)$によって定められる数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$について, 次の問いに答えよ。

(1) $a_2, a_3, a_4, a_5$を求めよ。

(2) 第$n$項を$n$の式で表わし, それが正しいことを証明せよ。

(3) 第$n$項までの和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$を求めよ。

〔広島大〕

(1) $a_2=3a_1+3^2=3^2+3^2=2\cdot3^2=18$

$a_3=3a_2+3^3=3\cdot18+3^3=3\cdot3^3=81$

$a_4=3a_3+3^4=3\cdot81+3^4=4\cdot3^4=324$

$a_5=3a_4+3^5=3\cdot324+3^5=5\cdot3^5=1215$

(2) $a_n=n\cdot3^n$

$n=1$のとき $a_1=1\cdot3=3$ で成り立つ

$n=k$のとき成り立つとすると

$a_k=k\cdot3^k$

$n=k+1$のとき

$a_{k+1}=3a_k+3^{k+1}$

$=3\cdot k\cdot3^k+3^{k+1}$

$=k\cdot3^{k+1}+3^{k+1}$

$=(k+1)3^{k+1}$ となり $n=k+1$のときも成り立つ

(3) $S_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n$

$-)\ 3\cdot S_n=\quad +1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\,3^{n+1}$

$-2S_n=3+3^2+3^3+\cdots3^n-n\,3^{n+1}$

$-2S_n=\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-n\,3^{n+1}$

$-2S_n=\dfrac{(1-2n)3^{n+1}-3}{2}$

よって $S_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$