帰納法6

数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 2, x_{n+1} = (n+1)^2\left(\frac{2x_n}{n^2} - 1\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める。

(1) $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ。

(2) すべての正の整数 n に対して,

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - k^2) = (n^2 - 2n + 3)2^n - 3$$

が成り立つことを, 数学的帰納法で証明せよ。

〔室蘭工大〕

(1) 与式より 両辺を $(n+1)^2$ でわって

$\dfrac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \dfrac{2x_n}{n^2} - 1$ 　 $b_n = \dfrac{x_n}{n^2}$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n - 1$

特性方程式 $x = 2x - 1 \to x = 1$ より

$b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

$b_n - 1$ は 初項 1 公比 2 の等比数列

∴ $b_n - 1 = 2^{n-1}$

$b_n = 2^{n-1} + 1$

$\dfrac{x_n}{n^2} = 2^{n-1} + 1$

従って $x_n = n^2 2^{n-1} + n^2$

(2)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 2^{k-1} + k^2 - k^2)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 2^{k-1} = (n^2 - 2n + 3)2^n - 3$

$n=1$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} 1 \cdot 2^0 = (1 - 2 + 3) \cdot 2 - 3 = 1$

で成り立つ

$n = m$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 \cdot 2^{k-1} = (m^2 - 2m + 3)2^m - 3$

が成り立つとすると

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} k^2 \cdot 2^{k-1}$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 \cdot 2^{k-1} + (m+1)^2 \cdot 2^m$

$= (m^2 - 2m + 3)2^m - 3 + (m^2 + 2m + 1)2^m$

$= (2m^2 + 4)2^m - 3$

$= (m^2 + 2)2^{m+1} - 3$

$= \{(m+1)^2 - 2(m+1) + 3\}2^{m+1} - 3$

よって $n = m+1$ のときも成り立つ

従って すべての正の整数において

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_n - k^2) = (n^2 - 2n + 3)2^n - 3$

が成立する