キノウホウ8

nを2以上の自然数とするときn^7-nが7の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。〔日本女子大〕

$n=2$のとき

$2^7-2=128-2$

$=126$

$=7\cdot 18$で成り立つ

ちなみに$n=1$のとき$1^7-1=0=7\cdot 0$で成り立つ.

$n=k$のとき 与式が7の倍数であると仮定すると

$k^7-k=7m$ (mは自然数)が成り立つ

$n=k+1$のとき

$(k+1)^7-(k+1)$

$={}_7C_0+{}_7C_1k+{}_7C_2k^2+{}_7C_3k^3+{}_7C_4k^4+{}_7C_5k^5+{}_7C_6k^6+{}_7C_7k^7-k-1$

$=(k^7-k)+({}_7C_1k+{}_7C_2k^2+{}_7C_3k^3+{}_7C_4k^4+{}_7C_5k^5+{}_7C_6)$ $\cdots$ ①

となり k^7-kは7の倍数で ${}_7C_1$・${}_7C_2$, ${}_7C_3$, ${}_7C_4$・${}_7C_5$, ${}_7C_6$も7の倍数であるから ①は7の倍数

よって

$(k+1)^7-(k+1)$は7の倍数である

以上より すべての自然数nに対してn^7-nは7の倍数である