kinohou9

n を自然数とするとき, 次の不等式を数学的帰納法によって証明せよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} \leqq \frac{3}{4}-\frac{1}{4n}$$

〔東北学院大学〕

$n=1$ のとき

$\frac{1}{2} \leqq \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$　$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}$ で等号が成り立つ

$n=k$ のとき与式の不等式が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k} \leqq \frac{3}{4}-\frac{1}{4k}$$

が成り立つ.

$n=k+1$ のとき両辺に $\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)}$ を加えると

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)} \leqq \frac{3}{4}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)}$$

ここで $\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}$ と $\frac{3}{4}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)}$ の大小を比較すると.

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)}\right]$$

$$=-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{4k}-\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$=\frac{-k(2k+1)+(2k+1)(k+1)-2k}{4k(2k+1)(k+1)}$$

$$=\frac{-2k^2-k+2k^2+3k+1-2k}{4k(2k+1)(k+1)}$$

$$=\frac{1}{4k(2k+1)(k+1)}>0 \text{ となるので}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)} \leqq \frac{3}{4}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{\{2(k+1)-1\}2(k+1)}<\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}$$

が成り立つ　よって $n=k+1$ のときも成り立つ

したがって題意の不等式は成り立つ