[illegible]

(1) $x^3-3x^2-27x-27=0$

$x=-3$ のとき

$-27-27+81-27=0$

よって

与式は$(x+3)$を因数にもつ.

したがって

$(x+3)(x^2-6x-9)=0$ となり

この方程式の解は

$x=-3 \quad x=3\pm3\sqrt{2}$

よって a, b, c は異なる3つの実数解である.

$$
\begin{array}{r}
x^2-6x-9 \\
x+3\,\big)\,x^3-3x^2-27x-27 \\
-)\ x^3+3x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-6x^2-27x \qquad \\
-)\ -6x-18x \qquad \\
\hline
-9x-27
\end{array}
$$

(2) 以下 $a=3$, $b=3-3\sqrt{2}$, $c=3+3\sqrt{2}$ とする

$P_1=-3+3-3\sqrt{2}+3+3\sqrt{2}=3$

$P_2=(-3)^2+(3-3\sqrt{2})^2+(3+3\sqrt{2})^2$

$=9+9+18-18\sqrt{2}+9+18+18\sqrt{2}$

$=63$

$P_3=(-3)^3+(3-3\sqrt{2})^3+(3+3\sqrt{2})^3$

$=\cancel{-27}+\cancel{27}\cancel{-3\cdot3^2\cdot3\sqrt{2}}+3\cdot3\cdot(-3\sqrt{2})^2\cancel{-54\sqrt{2}}+27+\cancel{3\cdot3^2\cdot3\sqrt{2}}+3\cdot3\cdot(3\sqrt{2})^2+\cancel{54\sqrt{2}}$

$=351$

(3) a, b, c は方程式の解なので

$a^3-3a^2-27a-27=0$

$a^3=3a^2+27a+27$ …①

同様に

$b^3=3b^2+27b+27$ …②

$c^3=3c^2+27c+27$ …③

①にa^n, ②にb^n, ③にc^nをかけると

$a^{n+3}=3a^{n+2}+27a^{n+1}+27a^n$

$b^{n+3}=3b^{n+2}+27b^{n+1}+27b^n$

$+)\ c^{n+3}=3c^{n+2}+27c^{n+1}+27c^n$

$P_{n+3}=3P_{n+2}+27P_{n+1}+27P_n$

よって $\underline{P_{n+3}=3P_{n+2}+27P_{n+1}+27P_n}$

(4) $P_1=3^1$, $P_2=3^2\cdot7$, $P_3=3^3\cdot13$ であるから

$n=1,2,3$ のときは成り立つ.

$n=k$ のとき

$P_n=3^n\cdot p$, $P_{n+1}=3^{n+1}\cdot q$, $P_{n+2}=3^{n+2}\cdot r$

が成り立つとすると(3)より

$P_{n+3}=3\cdot3^{n+2}\cdot r+27\cdot3^{n+1}\cdot q+27\cdot3^n\cdot p$

$=3^{n+3}\cdot r+3^{n+3}\cdot3q+3^{n+3}\cdot p$

$=3^{n+3}(r+3q+p)$

となり P_{n+3}は3^{n+3}の倍数である

よって すべての自然数において P_nは3^nの倍数である.