kiseki 4

点Qが円 $x^2+y^2-4y=0$ 上を動くとき, 点A$(-3,0)$と点Qを結ぶ線分AQを2 : 1に内分する点Pの軌跡を求めよ。

$P(x, y)$とする

$Q(p, q)$とすると

$$x=\frac{-3+2p}{3},\quad y=\frac{0+2q}{3}$$

$$x=\frac{-3+2p}{3} \qquad y=\frac{2q}{3}$$

$3x=-3+2p$

$2p=3x+3$

$p=\frac{3x+3}{2}$ …①

$3y=2q$

$q=\frac{3}{2}y$ …②

p, qは円上の点なので

$p^2+q^2-4q=0$が成り立つ。これに①, ②を代入すると

$$\left(\frac{3x+3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2-4\cdot\frac{3}{2}y=0$$

$$\frac{9}{4}(x+1)^2+\frac{9}{4}y^2-6y=0$$

$$(x+1)^2+y^2-\frac{8}{3}y=0$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

よって 中心$\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ 半径$\frac{4}{3}$の円