

三角 10

$0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ の範囲で、方程式

$$\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$$

の解は 個あり、そのうち最も大きい解は $\frac{\text{}{\text{}}\pi$ 、その次に大きい解は $\frac{\text{}{\text{}}\pi$ である。

[神戸学院大]

加法定理

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \text{ を使う}$$

上の加法定理で

$$\cos 3\theta + \cos 7\theta \text{ を考えると}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(5\theta - 2\theta) \\ &= \cos 5\theta \cos 2\theta + \sin 5\theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 7\theta &= \cos(5\theta + 2\theta) \\ &= \cos 5\theta \cos 2\theta - \sin 5\theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\cos 3\theta + \cos 7\theta = 2 \cos 5\theta \cos 2\theta \text{ となり互式は}$$

$$\cos 5\theta + 2 \cos 5\theta \cos 2\theta = 0 \text{ とする}$$

$$\cos 5\theta (2 \cos 2\theta + 1) = 0 \text{ であるから 解は}$$

$$\cos 5\theta = 0 \dots \text{①} \text{ また } \cos 2\theta = -\frac{1}{2} \dots \text{②} \text{ とある}$$

① のとき

$$0 \leq 5\theta \leq \frac{15}{4}\pi \text{ であるから } 5\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{1}{2}\pi, \frac{7\pi}{10}$$

② のとき

$$0 \leq 2\theta \leq \frac{3}{2}\pi \text{ であるから } 2\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{以上より 解は } \theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{1}{2}\pi, \frac{7\pi}{10}, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

1 の 6 個

$$\text{1番大きい解は } \frac{7}{10}\pi \text{ その次に大きいのは } \frac{2}{3}\pi \text{ である}$$