三角f 12

x

2次方程式 $x^2+\dfrac{p}{\sin\theta}+1=0$ の1つの解が $\alpha=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ であるとき，次の問いに答えよ。ただし，定数 p は整数で，実数 θ は $0<\theta<\pi$ を満たす。

(1) p の値を求めよ。

(2) α 以外の解 β を求めよ。

(3) $\alpha^2+\beta^2=6$ のとき，θ の値を求めよ。

〔北海道学園大〕

(1) $\alpha=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ を与式の方程式に代入すると

$$\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{p}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+1=0$$

$$\frac{p}{1+\cos\theta}=-\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}-1 \qquad p=-\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}-(1+\cos\theta)$$

$$=\frac{-\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2}{1+\cos\theta}=\frac{-\sin^2\theta-1-2\cos\theta-\cos^2\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{-2(1+\cos\theta)}{1+\cos\theta} \qquad \therefore p=-2$$

(2) 解を α,β とすると

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-\dfrac{2}{\sin\theta}x+1$ となるので

解と係数の関係により

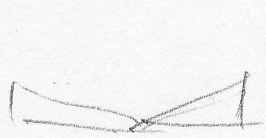
$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{2}{\sin\theta}\\ \alpha\beta=1\end{cases} \qquad \beta=\frac{1}{\alpha}\text{ であるから} \qquad \beta=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

(3)
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^2-2=6$$

$$\frac{4}{\sin^2\theta}=8$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}$$



$\sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $0<\theta<\pi$ より

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ $\dfrac{3}{4}\pi$