三角f13

$f(x)=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$ とする。ただし，θ は $0\leqq\theta<2\pi$ である。

(i) x の 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を求め，かつ，その 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(ii) $t=\sin\theta$ とするとき $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を t の 2 次式として表せ。

(iii) (ii) で求めた t の 2 次式を因数分解せよ。

(iv) 方程式 $f(x)=0$ のすべての解が $\frac{1}{2}$ より大きくなるような θ の値の範囲を求めよ。

〔北海道医療大〕

i) $4\sin^2\theta-4\cdot\left(-\cos^2\theta+\frac{\sqrt3}{2}\right)=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sqrt3$

$=4-2\sqrt3>0$　∴ 実数解の個数は2つ

ii) $f\left(\frac12\right)=\frac14-\sin\theta-(1-\sin^2\theta)+\frac{\sqrt3}{2}$

$=\sin^2\theta-\sin\theta-\frac34+\frac{\sqrt3}{2}$

$t=\sin\theta$ より　$0\leqq t\leqq1$

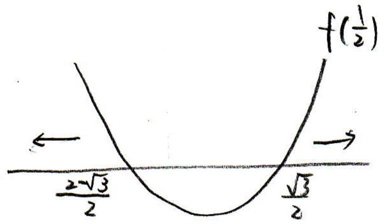
$f\left(\frac12\right)=t^2-t+\frac{-3+2\sqrt3}{4}$

iii) $t^2-t+\frac{-3+2\sqrt3}{4}=0$　$t=\frac{1\pm\sqrt{1-(-3+2\sqrt3)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{4-2\sqrt3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{(\sqrt3-1)^2}}{2}$

$=\frac{1\pm(\sqrt3-1)}{2}$ より $t=\frac{\sqrt3}{2},\ \frac{2-\sqrt3}{2}$

$\left(t-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(t+\frac{-2+\sqrt3}{2}\right)$　∴ $\left(t-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(t-\frac{2-\sqrt3}{2}\right)$

iv)



∴ $t>\frac{\sqrt3}{2}$　$t<\frac{2-\sqrt3}{2}$

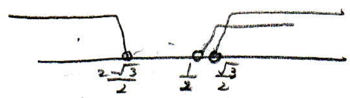
$\sin\theta>\frac{\sqrt3}{2}$ …②　$\sin\theta<\frac{2-\sqrt3}{2}$ …③

$t^2-t+\frac{-3+2\sqrt3}{4}$

$=\left(t-\frac12\right)^2-1+\frac{\sqrt3}{2}$

軸は $\frac12$ なので　$t>\frac12$　∴ $\sin\theta>\frac12$ …①

①,②,③より　$\sin\theta>\frac{\sqrt3}{2}$



∴ $\sin\theta>\frac{\sqrt3}{2}$ より

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$