

関数 $f(x) = \cos 2x + 2a \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$) について次の問いに答えよ。ただし、 a は正の定数とする。

- (1) $f(x)$ を $\cos x$ と a の式で表せ。
- (2) $f(x) = -3$ をみたす x の値が1つに限るような a の値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) $f(x)$ の最小値を a の式で表せ。

[北海道学園大]

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1 \quad \text{ここで } f(x) \text{ に代入し} \end{aligned}$$

$$f(x) = (2\cos^2 x - 1) + 2a \cos x \quad \therefore \underline{f(x) = 2\cos^2 x + 2a \cos x - 1}$$

$$(2) \quad 2\cos^2 x + 2a \cos x - 1 = -3$$

$$2\cos^2 x + 2a \cos x + 2 = 0$$

$$\cos^2 x + a \cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)^2 = 0 \quad \text{or} \quad (\cos x - 1)^2 = 0 \quad \text{or} \quad \text{両方とも成立}$$

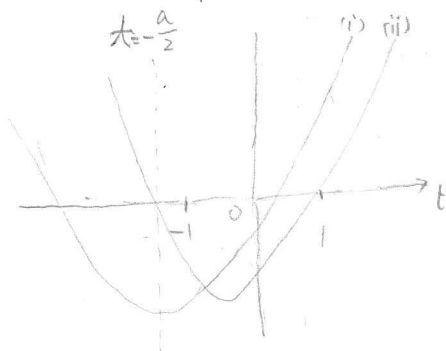
$$(\cos x + 1)^2 = 0 \quad \text{or} \quad a = 2 \quad \text{or} \quad \cos x = -1 \quad \text{or} \quad x = \pi$$

$$(\cos x - 1)^2 = 0 \quad \text{or} \quad a = -2 \quad \text{or} \quad \cos x = 1 \quad \text{or} \quad x = 0. \quad (\because \text{ここで } a > 0 \text{ に及ぶ } a \text{ が不適})$$

$$\therefore \underline{a = 2, \text{ or } x = \pi}$$

$$(3) \quad f(x) = 2t^2 + 2at - 1 \quad \text{と可} \quad \therefore t = \cos x \text{ とし } -1 \leq t \leq 1 \text{ と可}$$

$$f(x) = 2\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 1$$



$$(i) \quad -\frac{a}{2} < -1 \quad \text{or} \quad a > 2 \text{ のとき}$$

$$t = -1 \text{ が最小値}$$

$$f(-1) = -2a + 1$$

$$(ii) \quad -1 \leq -\frac{a}{2} < 0 \quad \text{or} \quad 0 < a \leq 2 \text{ のとき}$$

$$t = -\frac{a}{2} \text{ が最小値}$$

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} - 1$$

それ以外に $a > 0$ に及ぶ a を考慮して可

$$a > 2 \text{ のとき最小値 } -2a + 1$$

$$0 < a \leq 2 \text{ のとき最小値 } -\frac{a^2}{2} - 1$$