IIB 三角関数20

$0° < \theta < 90°$ で，$\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ であるとする。

(1) $x = \sin\theta\cos\theta$ とするとき，x に関する 2 次方程式を求めよ。

(2) $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 次の値を求めよ。

(i) $\sin\theta$　　(ii) $\tan\theta$

(4) 次の式の値を求めよ。

(i) $\dfrac{1}{\cos 60°} - \dfrac{1}{\sin 60°}$　　(ii) $\dfrac{1}{\cos 75°} - \dfrac{1}{\sin 75°}$

〔北海道医療大〕

(1) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{3}$

$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$x = \sin\theta\cos\theta$ より

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

(2) $(x+1)(3x-1) = 0$

よって $\sin\theta\cos\theta = -1, \frac{1}{3}$　$0 < \theta < 90°$ より $\sin\theta\cos\theta > 0$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}$

(3) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ より

$\sin\theta + \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$　$0° < \theta < 90°$ では $\sin\theta + \cos\theta > 0$ なので

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$　これと(2)の結果から $\cos\theta, \sin\theta$ を解にもつ方程式は

解と係数の関係を用いて　$t^2 - \frac{\sqrt{15}}{3}t + \frac{1}{3} = 0$

$3t^2 - \sqrt{15}t + 1 = 0$　$t = \dfrac{\sqrt{15} \pm \sqrt{15-12}}{6} = \dfrac{\sqrt{15} \pm \sqrt{3}}{6}$

ここで $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ より $\sin\theta > \cos\theta$ であるから $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2}{15-3} = \dfrac{18+6\sqrt{5}}{12} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，

(i) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$，(ii) $\tan\theta = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(4) (i) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$　(i) $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$

(ii) $\cos 75° = \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$　$\dfrac{1}{\cos 75°} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

$\sin 75° = \sin 30°\cos 45° + \sin 45°\cos 30° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$　$\dfrac{1}{\sin 75°} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$　(ii) $2\sqrt{2}$