三角関数 27

6]し

$f(\theta)=\cos^2\theta-6\cos\theta\sin\theta-5\sin^2\theta\ (0\leqq\theta<\pi)$ は $f(\theta)=\boxed{}\cos2\theta-\boxed{}\sin2\theta-2$ と表される。よって，$f(\theta)$ は $\theta=\boxed{}$ において最大値 $\boxed{}$，$\theta=\boxed{}$ において最小値 $\boxed{}$ をとる。 〔関西学院大・文系〕

$2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$ …①

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta$ より

$1-2\sin^2\theta=\cos2\theta$ であるから $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$ …②

また

$2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$ であるから $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$ …③

①，②，③より

$f(\theta)=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}-3\sin2\theta-\dfrac{5(1-\cos2\theta)}{2}$ となり整理すると

$f(\theta)=3\cos2\theta-3\sin2\theta-2$

$f(\theta)=3\sqrt2\sin\left(2\theta+\dfrac34\pi\right)-2$

$0\leqq\theta<\pi$ であるから $\dfrac34\pi\leqq2\theta+\dfrac34\pi<\dfrac{11}{4}\pi$，

$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac34\pi\right)\leqq1$ であることから $2\theta+\dfrac34\pi=\dfrac{5\pi}{2}$ のときつまり $\theta=\dfrac78\pi$ のとき最大値 $3\sqrt2-2$，$2\theta+\dfrac34\pi=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき，つまり $\theta=\dfrac38\pi$ のとき最小値 $-3\sqrt2-2$ をとる

(答) $\begin{cases}\theta=\dfrac78\pi \text{ で最大値 } 3\sqrt2-2\\ \theta=\dfrac38\pi \text{ で最小値 } -3\sqrt2-2\end{cases}$