ⅡB 三角関数 29

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周上の点を P とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, P は A, B とは異なるものとする。

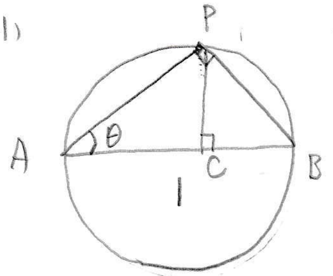
(1) $\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とするとき, 線分 AP, BP の長さを θ を用いて表せ。

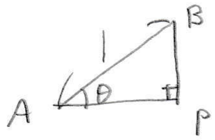
(2) P から AB に下ろした垂線と AB との交点を C とする。$\triangle$APC と $\triangle$BPC の周の長さの和 L を θ を用いて表せ。

(3) L の最大値を求め, そのときの θ の値を求めよ。

〔滋賀大〕

(1)



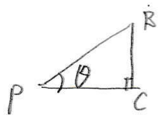


$BP = \sin\theta$

$AP = \cos\theta$.

(2) $AC = AP\cos\theta = \cos^2\theta$

$PC = AP\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$



$PC = BP\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$

$BC = BP\sin\theta = \sin^2\theta$.

よって

$L = AP + AC + PC + BP + BC + PC$

$= \cos\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta$

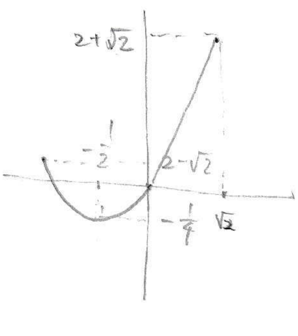
$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin\theta + \cos\theta$

$\therefore$ $L = (\sin\theta + \cos\theta)^2 + \sin\theta + \cos\theta$ ← $2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 1$ でも可

(3) $y = t^2 + t$　$\sin\theta + \cos\theta = t$ とする

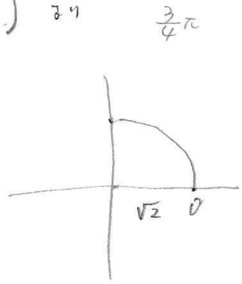
$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ より

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ として　$1 < t \leqq \sqrt{2}$



$t = \sqrt{2}$ のとき最大値 $2 + \sqrt{2}$ となる

よって このとき $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$　$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$



L は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2 + \sqrt{2}$ をとる