$0 \leqq x < 2\pi$ のとき, 方程式 $2\cos 2x + 4(a-1)x\sin x - 4a + 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための実数の定数 a の範囲を求めよ。 〔島根大〕

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ より

与式は

$2(1-2\sin^2 x) + 4(a-1)\sin x - 4a + 1 = 0$

$2 - 4\sin^2 x + 4(a-1)\sin x - 4a + 1 = 0$

$-4\sin^2 x + 4(a-1)\sin x - 4a + 3 = 0$

$4\sin^2 x - 4(a-1)\sin x + 4a - 3 = 0$ … ①

$\sin x = t$ とおくと ①は

$4t^2 - 4(a-1)t + 4a - 3 = 0$ となる。これを $f(t)$ とする.

これが $-1<t<1$ の内で重解をもつか、実数解を1つもてばよい.

i) $D/4 = 4(a-1)^2 - 4(4a-3) = 0$

$(a-1)^2 - (4a-3) = 0$

$a^2 - 2a + 1 - 4a + 3 = 0$

$a^2 - 6a + 4 = 0$

$(a-3)^2 = 5$　$a = 3 \pm \sqrt{5}$

このとき

$4t^2 - 4(2\pm\sqrt{5})t + 9\pm\sqrt{5} = 0$ となり

$t = \dfrac{2(2\pm\sqrt{5})}{4} = \dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ であるが

$t = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ は不適 ($-1<t<1$ であるから)

よって $a = 3-\sqrt{5}$

ii) $f(1)f(-1) < 0$ であればよいので

$f(1) = 4 - 4(a-1) + 4a - 3$

$= 5$

$f(-1) = 4 + 4(a-1) + 4a - 3$

$= 8a - 3$

$5(8a-3) < 0$ より

$8a - 3 < 0$

$a < \dfrac{3}{8}$

i) ii) より

$a = 3-\sqrt{5}$, $a < \dfrac{3}{8}$