

方程式 $\sin^2 \theta - k \sin \theta + \frac{1}{4} = 0$ ($0 \leq \theta < \pi$) について、

- (1) 4つの解を持つのは $\square < k < \square$ の場合である。
 (2) 3つの解を持つのは $k = \square$ の場合である。
 (3) 2つの解を持つのは $k = \square$ または、 $k > \square$ の場合である。

[青山学院大]

$\sin \theta = x$ とおく $\because 0 \leq x \leq 1$

$$x^2 - kx + \frac{1}{4} = 0$$

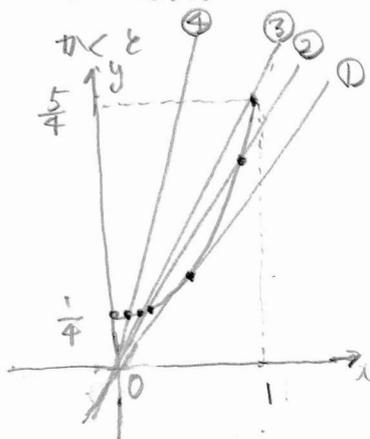
これを

$$x^2 + \frac{1}{4} = kx \text{ とし } \dots \textcircled{1}$$

左辺を $y = x^2 + \frac{1}{4}$ 右辺を $y = kx$ とすると

①はこの2つの関数の交点を求めていることになる

x の定義域が $0 \leq x \leq 1$ なのでグラフを



①と④のときは解が2つ

②のときは解が4つ

③のときは解が3つ

①のときは接するときなので

$$x^2 + \frac{1}{4} = kx \text{ から } x^2 - kx + \frac{1}{4} = 0$$

$$D=0 \text{ とし } k^2 - 1 = 0 \quad k = \pm 1 \quad k > 0 \text{ より } k = 1 \dots \text{解が2つ}$$

④のときは点 $(1, \frac{5}{4})$ を通る傾きより大きいときなので $y = kx$ に $(1, \frac{5}{4})$ を代入すると $k = \frac{5}{4}$ として ④のときは $k > \frac{5}{4}$... 解が2つ

②のときは $k = 1$ と $k = \frac{5}{4}$ の間なので 解が4つになるのは $1 < k < \frac{5}{4}$

③のときは $k = \frac{5}{4}$ のとき 解が3つ

以上より

1) 解が4つ $1 < k < \frac{5}{4}$

2) 解が3つ $k = \frac{5}{4}$ 1

3) 解が2つ $k = 1, k > \frac{5}{4}$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

※ 交点が1つなら解が2つになるのは傾きが $\sin \theta = \frac{1}{2}$ になる値は2つありますよね。

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ に対して $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ というように2つ解があるからです。