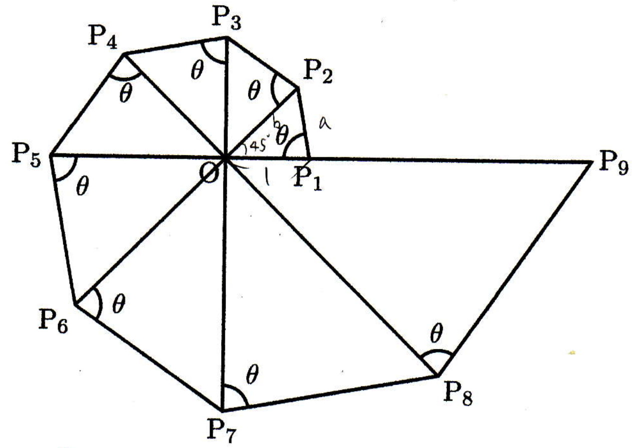
図のように 8 つの三角形 $OP_nP_{n+1}(n = 1, 2, 3, \cdots, 8)$ がある。ただし, $OP_1 = 1$ であり各 n について $\angle OP_nP_{n+1} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, $\angle P_nOP_{n+1} = \frac{\pi}{4}$ とする。このとき, 次の各問に答えよ。



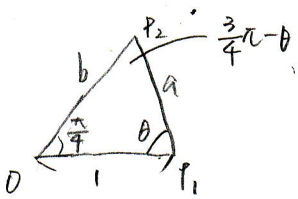
(1) 辺 OP_2 の長さを θ を用いて表せ。

(2) 辺 OP_9 の長さを θ を用いて表せ。

(3) 辺 OP_9 の長さが $\frac{81}{16}$ であるとき, $\tan\theta$ の値を求めよ。

〔宮崎大〕

(1)



$\sin\angle OP_2P_1 = \sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$ …①

正弦定理より

$\frac{OP_2}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}$ と①より

$OP_2 = \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ …(答)

(2)

$OP_3 = \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}OP_2$ … つまり $OP_{n+1} = \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}OP_n$ が成り立つ

よって OP_n は初項 1 公比 $\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ であるから $OP_n = \left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^{n-1}$

従って $OP_9 = \left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8$ …(答)

(3)

(2)より $16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \frac{81}{16}$ → $\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$

$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $2\sin\theta = \sqrt{3}\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

$\sqrt{3}\cos\theta = (2-\sqrt{3})\sin\theta$

よって $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+3$

$\tan\theta = 2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ …(答)