数B　三角f　8

関数 $f(\theta)$ を $f(\theta)=4\cos^3\theta+4\sin^3\theta-9\sin\theta\cos\theta$ で定める。また, $x=\cos\theta+\sin\theta$, $y=\cos\theta\sin\theta$ とおく。このとき, 次の問に答えよ。

(1) θ が 0 から 2π まで動くとき, 点 (x,y) の軌跡を求め, 図示せよ。

(2) $f(\theta)$ を x の式で表せ。

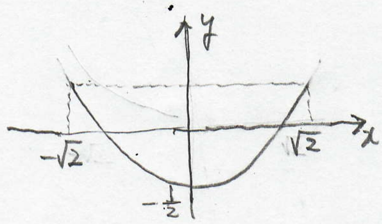
(3) θ が 0 から 2π までを動くときの, 関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

〔青山学院大〕

(1) $(\cos\theta+\sin\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$ より

$x^2-2y=1$　　$2y=x^2-1$　　$\therefore\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq2\pi$　　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ より　$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ である



(2)
$f(\theta)=4(\cos^3\theta+\sin^3\theta)-\frac{9}{2}\ldots$

$=4\{(\cos\theta+\sin\theta)^3-3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)\}-9\sin\theta\cos\theta$

$=4x^3-12xy-9y$　　ここで(1)より $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ であるから

$f(\theta)=4x^3-12x(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})-9(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})$

$=4x^3-6x^3+6x-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}$　　$\therefore\ \underline{f(\theta)=-2x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+\frac{9}{2}}$

(3) $g(x)=-2x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+\frac{9}{2}$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$ として考える。

$g'(x)=-6x^2-9x+6$

$=-3(2x^2+3x-2)$

$=-3(x+2)(2x-1)$

x	…	$-\sqrt{2}$	…	$\frac{1}{2}$	…	$\sqrt{2}$	…
$g'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		
$g(x)$	↗	最小	↗	最大	↘		

よって $g(x)$ は $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において　$x=\frac{1}{2}$ で最大値をとり その値は　$\frac{49}{8}$

また $x=-\sqrt{2}$ のとき最小値をとり その値は $-2\sqrt{2}-\frac{9}{2}$