# 三角関数 9

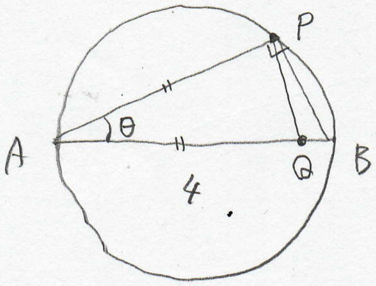
長さ4の線分ABを直径とする円周上に点Pがあり, AP=AQとなる点Qを直径AB上にとる。

(1) $\angle BAP=\theta$として, $\triangle APQ$の面積$S$を$\sin\theta$を使って表せば$S=$ $\boxed{\phantom{xx}}$ である。

(2) 点Pが円周上を動くとき, 面積$S$の最大値は $\boxed{\phantom{xx}}$ である。

〔昭和薬科大〕

(1)




$\triangle APQ$の面積$S$　$AP=AQ=4\cos\theta$

$S=\frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot16\cos^2\theta\cdot\sin\theta$

$=8(1-\sin^2\theta)\sin\theta$

$\therefore$ $S=-8\sin^3\theta+8\sin\theta$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(2)

$\sin\theta=t$とすると　$0<t<1$より

$S=-8t^3+8t$

$S'=-24t^2+8$

$=-8(3t^2-1)$

$S'=0$とすると　$3t^2-1=0$より　$t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<t<1$より　$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$のとき極値をとる

増減表をかくと

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S$ | | ↗ | $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | |

$\therefore t=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$のとき$S$は最大でその値は　$\frac{16\sqrt{3}}{9}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$　$-\frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{24}{3\sqrt{3}}$

$\frac{16}{3\sqrt{3}}$　$\frac{-8}{2\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{2}}$

$\frac{4}{\sqrt{2}}$