

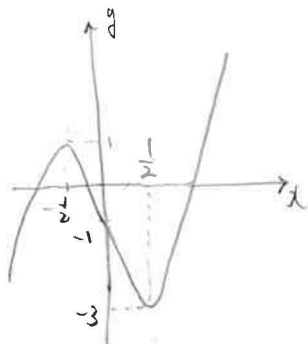
(1)

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 24x^2 - 6 \\ &= 6(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

$$f(-1) = 1 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$



よってグラフより $f(x) = 0$ を満足す。

実数 x は 3 個ある。

(2) $x = \cos \frac{5\pi}{9} = \cos p$ と ($f(x)$) に代入すると

$$f(x) = 8 \cos^3 p - 6 \cos p - 1 \dots \textcircled{1}$$

よって 3 倍角の公式と等しくと。

$$\begin{aligned} \cos(2\theta + \theta) &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta + 2\cos^3 \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって $\textcircled{1}$ は

$$2(4\cos^3 p - 3\cos p) - 1 \text{ と } \textcircled{1} \text{ 式の中の下線部は } \textcircled{2} \text{ から}$$

$\cos 3p$ と等しい

よって $\textcircled{1}$ は

$$f(x) = 2 \cos 3p - 1 \text{ と } \textcircled{1} \text{ 式の中を計算すると}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos \frac{5\pi}{3} - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{f(x) = 0}$$

1212

(3)

(2) 1) $x = \cos \frac{5\pi}{9}$ は $f(x) = 0$ の解の 1 つである。

よって

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{5}\right) &= -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 \\ &= \frac{-8 + 150 - 125}{125} \\ &= \frac{17}{125} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{6}\right) &= -\frac{8}{216} + 1 - 1 \\ &= -\frac{1}{27} < 0 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{5} \text{ と } x = -\frac{1}{6} \text{ の間には } x = \cos \frac{5\pi}{9} \text{ がある}$$

あることを示すには $x = -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$ の間には $x = \cos \frac{5\pi}{9}$ があることを示す。

その間の増減を調べる。 $-\frac{1}{5} \text{ と } -\frac{1}{6}$ が含まれる単調減少の区間 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ をみればよい。

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0, \quad f(0) = -1 < 0 \text{ である。}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3} \text{ であるから}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} < \cos \frac{5\pi}{9} < \cos \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \cos \frac{5\pi}{9} < 0 \text{ である。}$$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) > 0, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) < 0 \text{ であるから}$$

$$\underline{-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}}$$