整式 1-1 9-1

$a > 0, b > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。また, 等号が成り立つときを調べよ。

$$\frac{b}{3a} + \frac{12a}{b} \geqq 4$$

与式より

$\dfrac{b^2+36a^2}{3ab} \geqq 4$ となり

両辺 3ab 倍すると

$b^2+36a^2 \geqq 12ab$

$b^2-12ab+36a^2 \geqq 0$

$(b-6a)^2 \geqq 0$

となり 等号成立は $b=6a$ のときで

このとき $a>0$, $b>0$ において

左辺は 0以上となる

よって

$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b} \geqq 4$ $(\because a>0, b>0)$

等号成立は $b=6a$

$\dfrac{b}{3a}>0$ $\dfrac{12a}{b}>0$ より

相加相乗平均

を用いると

$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{3a}\cdot\dfrac{12a}{b}}=4$

よって $\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b} \geqq 4$

等号成立は

$\dfrac{b}{3a}=\dfrac{12a}{b}$

$b^2=36a^2$ より

$b=6a$ のとき