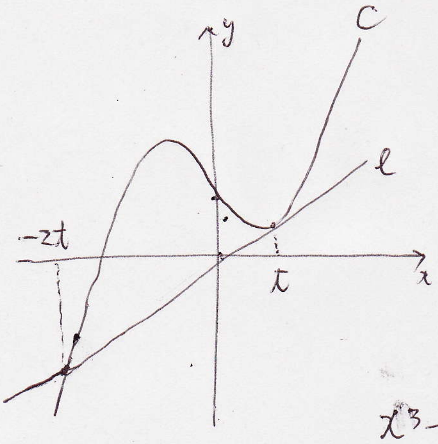
曲線 $C : y = x^3 - x + 2$ と直線 $\ell : y = mx$ の共有点が 2 個であるという。m を求め, 曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた面積を求めよ。

〔熊本女大〕

$y' = 3x^2 - 1$

$= (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$



共有点が2個ということは
グラフから ℓ が C に図のように
接するときである。
この接点の座標を (t, t^3-t+2) とすると
$y' = 3x^2-1$ より 接線の式は

$y = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t + 2 \cdots ①$

となり もう1つの交点は

$x^3 - x + 2 = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t + 2$ より

$x^3 - x + 2 = (3t^2-1)x - 2t^3 + 2$

$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$

$x = t$ で接することから

$(x-t)^2(x+2t) = 0$ と因数分解でき

もう1つの交点の x 座標は $-2t$ である。

また ① より $y = (3t^2-1)x - 2t^3 + 2$ は原点を
通ることから

$-2t^3 + 2 = 0$

$t^3 = 1$ t は実数より

$t = 1$ となる。

これより

接線の式は $y = 2x$ となる。

つまり $m = 2$

求める面積は $m = 2$ より

$\int_{-2}^{1} (x^3 - x + 2 - 2x)\,dx$

$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4)$

$= \frac{27}{4}$

$m = 2$、面積 $\frac{27}{4}$