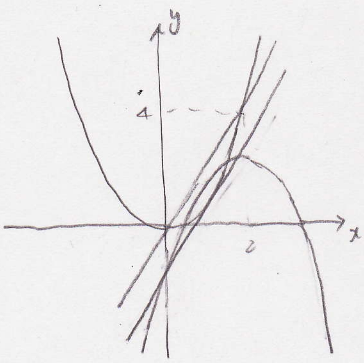
15

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x$ とで囲まれる部分を A, 曲線 $y = -x^2 + 4x - 1$ と直線 $y = 2x - 1$ とで囲まれる部分を B とする。A∪B の面積を求めよ。〔琉球大〕



i) $y=x^2$ と $y=2x$ は $x=0,2$ で交わる

ii) $y=-x^2+4x-1$ と $y=2x-1$ は $x=0,2$ で交わる

また

$y=-x^2+4x-1$

$=-(x-2)+3$

iii) $y=x^2$ と $y=2x-1$ は $x=1$ で接する

よりグラフの概形は左図のようになる

Aの面積を S_A とすると

$$S_A=\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}\cdot(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

Bの面積を S_B とすると

$$S_B=\int_0^2(-x^2+4x-1-2x+1)\,dx=\frac{1}{6}\cdot(2-0)^2=\frac{4}{3}$$

ここで

$y=x^2$ と $y=-x^2+4x-1$ の交点は

$x^2=-x^2+4x-1$

$2x^2-4x+1=0$

2つの交点を α,β $(\alpha<\beta)$ とすると

解と係数の関係より

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\text{これより}\quad(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4-2=2$$

$\beta-\alpha\geqq0$ より $\beta-\alpha=\sqrt{2}$ …①

S_A と S_B の共通部分を $S_{A\cap B}$ とすると

$$S_{A\cap B}=\int_\alpha^\beta(-x^2+4x-1-x^2)\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

①より

$$S_{A\cap B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$A\cup B=S_A+S_B-S_{A\cap B}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(答) $\dfrac{8}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$