17

曲線 C : $y = x^3 - 2x^2 + x$ と直線 $y = mx$ の交点のうち, 原点Oと異なる点をA, Bとし, 3点O, A, Bはこの順に等間隔に並んでいるものとする。

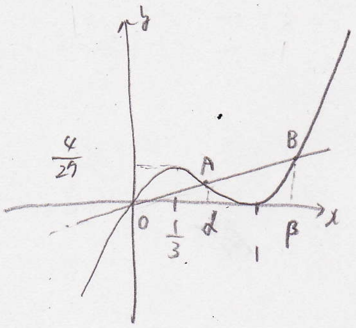
(1) m の値を求めよ。

(2) 曲線 C と線分ABで囲まれる部分の面積を求めよ。

〔東北大〕

(1) $y' = 3x^2 - 4x + 1$

$= (x-1)(3x-1)$ より グラフの概形は左下のようになる。



$x^3 - 2x^2 + x = mx$

$x^3 - 2x^2 + (1-m)x = 0$

$x\{x^2 - 2x + (1-m)\} = 0$

$x^2 - 2x + (1-m) = 0$ の解を α, β とする $(\alpha < \beta)$

$\alpha + \beta = 2$ …①

$\alpha\beta = 1 - m$ …②

また $\dfrac{\beta + 0}{2} = \alpha$ であるから $\dfrac{\beta}{2} = \alpha$ …③

①、③より $\dfrac{\beta}{2} + \beta = 2$, $\dfrac{3}{2}\beta = 2$, $\beta = \dfrac{4}{3}$, $\alpha = \dfrac{2}{3}$ となり

Aの座標、Bの座標はそれぞれ $A\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{27}\right)$, $B\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$

$\dfrac{2}{27} = \dfrac{2}{3}m$

$2 = 18m \quad m = \dfrac{1}{9}$

(2)
$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{9}x - x^3 + 2x^2 - x\right) dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(-x^3 + 2x^2 - \frac{8}{9}x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$$

$$= 0 - \left(-\frac{4}{81}\right)$$

$$= \frac{4}{81} \qquad \underline{\frac{4}{81}}$$