等式 $f(x)=x^2\int_{-1}^{0}f(t)\,dt+x\int_{0}^{2}f(t)\,dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　〔日本大〕

$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと

$$a=\int_{-1}^{0}at^2+bt+1\,dt=\left[\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}bt^2+t\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-1\right)$$

$$=\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+1 \quad \cdots ①$$

$$b=\int_{0}^{2}at^2+bt+1\,dt=\left[\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}bt^2+t\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}a+2b+2 \quad \cdots ②$$

① より

$$a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+1$$

$$6a=2a-3b+6$$

$$4a+3b=6 \quad \cdots ①'$$

② より

$$b=\frac{8}{3}a+2b+2$$

$$3b=8a+6b+6$$

$$-8a-3b=6 \quad \cdots ②'$$

$$\begin{cases} 4a+3b=6 & \cdots ①' \\ -8a-3b=6 & \cdots ②' \end{cases}$$

①' + ②'

$$-4a=12$$

$$a=-3$$

$$b=6$$

よって

$$f(x)=-3x^2+6x+1$$