関数 $f(x)=x^2(x+1)$ に対して, 関数 $g(x)=px^2+qx+r$ は, 条件 $f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$ および $f(k)=g(k)$ $(-1<k<1)$ をみたすものとする。このとき, k の値を適当に選んで $\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx$ が最小となるように, $g(x)$ を決定せよ。 〔高崎経済大〕

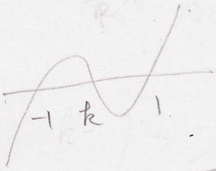
$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$, $f(k)=g(k)$ より

$f(-1)-g(-1)=0$, $f(1)-g(1)=0$ $f(k)-g(k)=0$ となり

$f(x)-g(x)$ は 解に $-1, 1, k$ をもつことになる

$\therefore$ $\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx = \int_{-1}^{1}|(x-1)(x+1)(x-k)|\,dx$

$= \int_{-1}^{k}(x-1)(x+1)(x-k)\,dx - \int_{k}^{1}(x-1)(x+1)(x-k)\,dx$

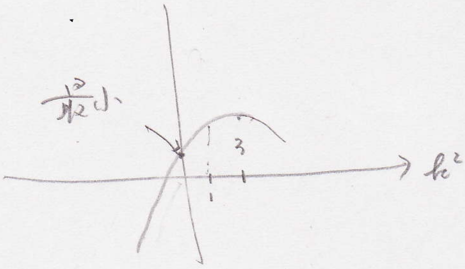


$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}kx^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx\right]_{-1}^{k} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}kx^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx\right]_{k}^{1}$

$= \left(\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{3}k^4 - \frac{1}{2}k^2 + k^2\right) - \left(\frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}k} - \frac{1}{2} - \cancel{k}\right) - \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{3}k} - \frac{1}{2} + \cancel{k}\right) + \left(\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{3}k^4 - \frac{1}{2}k^2 + k^2\right)$

$= -\frac{k^4}{6} + k^2 + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{6}(k^2-3)^2 + 2$ $\because$ k^2 は $0 \leqq k^2 \leqq 1$ ← $-1<k<1$ より



よって $k=0$ のとき最小である

従って

$f(x)-g(x) = x(x+1)(x-1)$

$x^2(x+1) - g(x) = x(x+1)(x-1)$

$g(x) = x^2(x+1) - x(x+1)(x-1)$

$= x^3+x^2-x^3+x$

$= x^2+x$

(答) $g(x)=x^2+x$