29

$g(x)$ を x の 2 次式とする。$f(x) = x + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ が $(x-2)^2$ で割りきれ, かつ $f'(0) = 4$ となるように $g(x)$ を定めよ。 〔防衛大〕

$f(x)$では $f(x) = x + \int_0^x g(t)\,dt$ に $x=0$を代入すると

$f(0)=0$ となる また $f(x)$は $(x-2)^2$で割り切れることと $g(x)$が2次式であるので

$f(x)$は3次式である

これより $f(x) = ax(x-2)^2$ $a \neq 0$の定数とおける

$f'(x) = a(x-2)^2 + 2ax(x-2)$ ← $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$f'(0) = 4a = 4$ より $a = 1$

従って

$x(x-2)^2 = x + \int_0^x g(t)\,dt$

$\int_0^x g(t)\,dt = x^3 - 4x^2 + 3x$

両辺微分して

$g(x) = 3x^2 - 8x + 3$ //