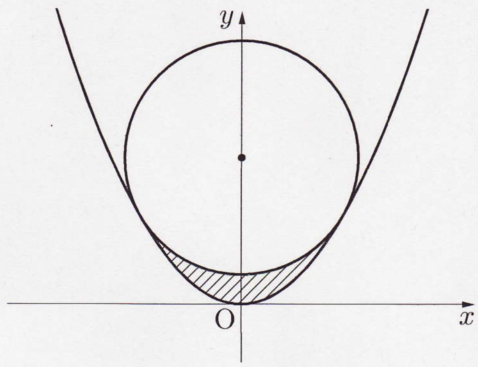
次の問いに答えなさい。

(1) $a > 1$ のとき, 円 $x^2 + (y - a)^2 = 1$ が, 放物線 $y = x^2$ と接するような a の値を求めなさい。

(2) (1) のとき, 右の図の斜線部分をつけた部分の面積を求めよ。



〔大阪電通大〕

(1) $y+(y-a)^2=1$

$y+(y^2-2ay+a^2)=1$

$y^2+(-2a+1)y+a^2-1=0$ …①

①が重解をもてばよいので

判別式 $D=0$ とすると

$(-2a+1)^2-4(a^2-1)=0$

$4a^2-4a+1-4a^2+4=0$

$-4a=-5$

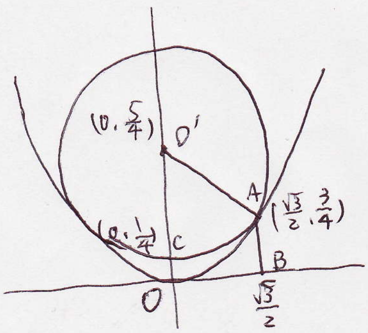
$a=\frac{5}{4}$

(2) (1)の $a=\frac{5}{4}$ より (1)の①は次のようになる

$y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=0$

$16y^2-24y+9=0$

$(4y-3)^2=0$ $y=\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4}=x^2$

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

これより左図における

A の座標は

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$ となり

おうぎ形

O'CA は中心角60°

半径1となる

→ これより求める面積をSとすると

$S=\{台形OO'AB - おうぎ形O'CA$

$- \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx\} \times 2$

よって

$S=\{(\frac{3}{4}+\frac{5}{4})\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} - 1\times1\times\pi\times\frac{1}{6}$

$- [\frac{1}{3}x^3]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\} \times 2$

$=\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\}\times 2$

$=\{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{6}\pi\}\times 2$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}\pi$

A $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}\pi$