ごうかく!

$\displaystyle\int_0^1 (x^2+px+q)\,dx \leqq \int_0^1 (x^2+px+q)^2\,dx$ が, p のどんな値に対しても成り立つような q の値の範囲を求めよ。〔宇都宮大〕

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}px^2+qx\right]_0^1 \leqq \left[\frac{x^5}{5}+\frac{px^4}{2}+\frac{(2q+p^2)}{3}x^3+pqx^2+q^2x\right]_0^1$$

$$\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{2}p}+q \leqq \frac{1}{5}+\cancel{\frac{1}{2}p}+\frac{2}{3}q+\frac{1}{3}p^2+pq+q^2$$

p^2 の2次関数として整理すると

$$\frac{1}{3}p^2+pq+q^2-\frac{1}{3}q-\frac{2}{15} \geqq 0$$

$$5p^2+15pq+15q^2-5q-2 \geqq 0$$

常に正または0であるためには
判別式 $D \leqq 0$ であればよい

$$225q^2-20(15q^2-5q-2) \leqq 0$$

$$15q^2-20q-8 \geqq 0$$

$$\therefore \quad q \leqq \frac{10-2\sqrt{55}}{15}, \quad q \geqq \frac{10+2\sqrt{55}}{15}$$