3次またはそれ以下の任意の整式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，つねに $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = uf(s)+vf(t)$ が成り立つような定数 u,v,s,t を求めよ。ただし，$s<t$ とする。〔東大〕

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2+cx+d)dx$$

$$=2\int_0^1(bx^2+d)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}bx^3+dx\right]_0^1=\frac{2}{3}b+2d \quad \cdots ①$$

$$uf(s)+vf(t)=u(as^3+bs^2+cs+d)+v(at^3+bt^2+ct+d)$$

$$=a(us^3+vt^3)+b(us^2+vt^2)+c(us+vt)+d(u+v) \quad \cdots ②$$

①，②が恒等式の関係より

$$\begin{cases} us^3+vt^3=0 & \cdots (ア) \\ us^2+vt^2=\frac{2}{3} & \cdots (イ) \\ us+vt=0 & \cdots (ウ) \\ u+v=2 & \cdots (エ) \end{cases}$$

(ア) − (イ) × t

$$\begin{array}{rl} & us^3+vt^3=0 \\ -) & us^2t+vt^3=\frac{2}{3}t \\ \hline & us^3-us^2t=-\frac{2}{3}t \end{array} \rightarrow us^2(s-t)=-\frac{2}{3}t \quad \cdots ③$$

(イ) − (ウ) × t

$$\begin{array}{rl} & us^2+vt^2=\frac{2}{3} \\ -) & ust+vt^2=0 \\ \hline & us^2-ust=\frac{2}{3} \end{array} \rightarrow us(s-t)=\frac{2}{3} \quad \cdots ④$$

④を両辺 s 倍すると

$us^2(s-t)=\frac{2}{3}s=-\frac{2}{3}t$ となる ∴ $s=-t$ これと(ア),(ウ)より $u=v$

$u=v$ と(エ)より $u=v=1$ で，(イ)より $2s^2=\frac{2}{3}$ $s^2=\frac{1}{3}$ $s=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

となり $s=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$s=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ただし $t>s$ より $s=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

以上より

$$u=v=1,\ s=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$