積分34

k と a は $k>0, \frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{3}{4}$ を満たすとする。放物線 $C : y=-kx^2+a$ と x 軸の正の部分との交点を P とする。放物線 C の点 P における接線の傾きが $\frac{-2a}{1-a^2}$ であるとき, 次の問いに答えよ。

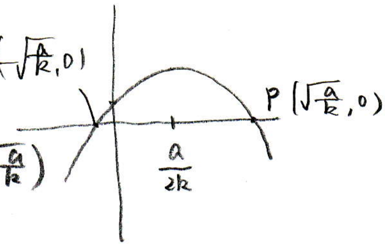
(1) k を a を用いて表わせ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を S とする。S の最大値と最小値を求めよ。また, S がその値をとるときの a の値を求めよ。

〔和歌山大〕

(1) $y=-k\left(x-\frac{a}{2k}\right)^2+\frac{a^2}{4k}$

$y=-k\left(x^2-\frac{a}{k}\right)=-k\left(x+\sqrt{\frac{a}{k}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$



点 $P(\sqrt{\frac{a}{k}},0)$ における接線の傾きは

$y'=-2kx$ より $-2k\sqrt{\frac{a}{k}}=-2\sqrt{ak}$ …① ①が $\frac{-2a}{1-a^2}$ と等しいので

$-2\sqrt{ak}=\frac{-2a}{1-a^2}$ とこれを k について解くと $k=\frac{a}{(1-a^2)^2}$

(2)

$S=\int_{-\sqrt{\frac{a}{k}}}^{\sqrt{\frac{a}{k}}}(-kx^2+a)\,dx$ $\qquad S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ の利用

$=\frac{k}{6}\left(\sqrt{\frac{a}{k}}+\sqrt{\frac{a}{k}}\right)^3$

$=\frac{4}{3}k\cdot\frac{a}{k}\sqrt{\frac{a}{k}}=\frac{4}{3}a(1-a^2)=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}a^3$

$S'=\frac{4}{3}-3\cdot\frac{4}{3}a^2$

$=\frac{4}{3}(1-3a^2)$ $\qquad a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極値をとる ただし $\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{3}{4}$ なので
増減表は左下図のようになり

a	…	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	$\frac{1}{4}$	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	$\frac{3}{4}$
S'		0						
S	↘	$-\frac{8\sqrt{3}}{27}$	↗	$\frac{5}{16}$	↗	$\frac{8\sqrt{3}}{27}$	↘	$\frac{7}{16}$

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{8\sqrt{3}}{27}$

$a=\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{5}{16}$ となる

ごうかく!
ごうかく!
ごうかく!