セキ分35

曲線 $C: y = x^2$ 上の2点A, Bの x 座標をそれぞれ a, b とし, $a < b$ とする。

(1) 点A, Bを通る直線 l の方程式を求めよ。

(2) C と l で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(3) $S = 36$ のとき, 線分ABの長さを最小にする a, b を求めよ。

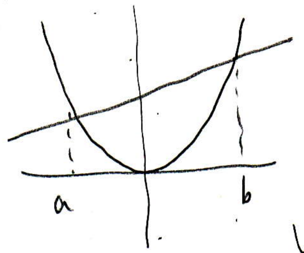
〔愛媛大〕

(1) $A(a, a^2)$ $B(b, b^2)$

$y = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)+a^2$ $b \neq a$ より

$= (b+a)(x-a)+a^2$ $\quad y=(b+a)x-ab$

(2)



$S = \int_a^b \{(b+a)x-ab-x^2\}dx$

$= \frac{1}{6}(b-a)^3$

$-\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$

$= -\int_a^b [(x-a)\{(x-a)+(a-b)\}]dx$

$= -\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{1}{2}(a-b)(x-a)^2\right]_a^b$

$= -\left\{\frac{1}{3}(b-a)^3-\frac{1}{2}(b-a)^3\right\} = \frac{1}{6}(b-a)^3$ $\quad \underline{S=\frac{1}{6}(b-a)^3}$ //

(3) $36 = \frac{1}{6}(b-a)^3 \quad \cdots (b-a)^3=6^3 \quad \underline{b-a=6} \quad b = 6+a$

$AB^2 = (b-a)^2+(b^2-a^2)^2$

$= 6^2+(b-a)^2(b+a)^2$

$= 36+36(b+a)^2$

$= 36+36(6+2a)^2$

$\therefore$ $6+2a=0$ のとき ~~最~~ 最小

$\underline{a=-3,\ b=3}$ //