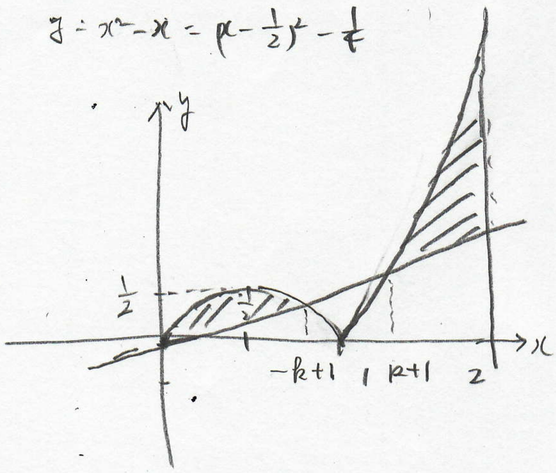
積分36

$0 \leqq x \leqq 2$ において曲線 $y = x|x-1|$ と x 軸の間にある部分の面積が, 原点を通る直線 $y = kx$ によって二等分されるような k を求めよ。　〔弘前大〕

$y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$



$0 \leqq x \leqq 2$ における $y = x|x-1|$ と x 軸とで囲まれた面積は

$$\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1$$

$-x^2 + x = kx$ として交点を求めると

$-x(x - 1 + k) = 0$　　$x = 1 - k$

$x^2 - x = kx$ として交点を求めると

$x(x - 1 - k) = 0$　　$x = 1 + k$

∴ 上図の斜線部の面積は

$$\int_0^{-k+1} (-x^2 + x - kx)\,dx + \int_{k+1}^2 (x^2 - x - kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(1-k)^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1+k)x^2\right]_{k+1}^2$$

$$= \frac{1}{6}(1-k)^3 + \left\{\frac{8}{3} - 2(1+k)\right\} - \left\{\frac{1}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{2}(1+k)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(1-k)^3 + \frac{2}{3} - 2k + \frac{1}{6}(1+k)^3$$

$$= \frac{1}{6}(1 - 3k + 3k^2 - k^3) + \frac{2}{3} - k + \frac{1}{6}(1 + 3k + 3k^2 + k^3)$$

$$= k^2 - 2k + 1$$

$= (k-1)^2$ いいの

(これ)が $\frac{1}{2}$ と等しいので

$$(k-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

原点における $y = x|x-1|$ の接線の傾きが 1 より　$0 < k < 1$ なので

$$k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$