積分37

$f(x)=3x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求め, 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 点 $\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ を通る, 曲線 $y=f(x)$ の2つの接線を l_1, l_2 とする。2つの直線 l_1 と l_2 および曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

〔弘前大〕

(1) $f(x)=3x^2+ax$ とおくと

$3x^2+ax=3x^2+x\int_0^1(3t^2+at)dx$

$=3x^2+x\left[t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$

$=3x^2+x\left(1+\frac{1}{2}a\right)$

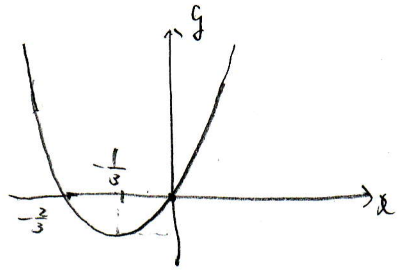
左辺と右辺が等しいので

$a=\frac{1}{2}a+1$

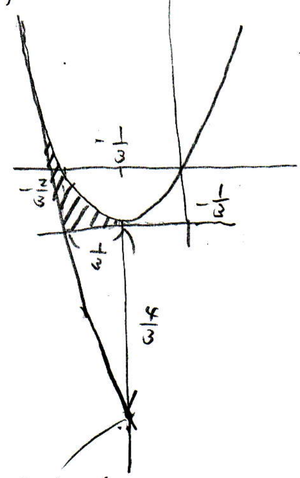
$a=2$

$f(x)=3x^2+2x$

$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$



(2)



$+\frac{4}{3}-3$　$\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$

$f'(x)=6x+2$　$f(x)$上の点$(t,\ 3t^2+2t)$の接線をもとめると

$y=(6t+2)(x-t)+3t^2+2t$

$y=(6t+2)x-3t^2$ ← これが $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ を通るので

$-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}(6t+2)-3t^2 \to 3t^2+4t+1=0 \to (3t+1)(t+1)=0$

$t=-\frac{1}{3},-1$

∴ 接線の式は

$y=-\frac{1}{3}$, $y=-4x-3$

$\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(3x^2+2x+4x+3)dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$

$=\left[x^3+3x^2+3x\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}$

$=\left(-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}-1\right)-(-1+3-3)-\frac{2}{9}$

$=\frac{8}{27}-\frac{2}{9}=\frac{2}{27}$

$\frac{2}{27}$