2B 積分41

2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$ を満たすとします。

(1) 2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2実根を持つことを示してください。

(2) 2次方程式 $f(x)=0$ の2根を α,β とします。$|\alpha-\beta|$ のとり得る値の範囲を求めてください。

〔慶応大〕

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+ax+b)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b=0$　　$\underline{3a+6b=-2}$ …①

$x^2+ax+b=0$ として判別式を調べると

a^2-4b となり①より　$b=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}$ であるから

$a^2-4\left(-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\right)=a^2+2a+\frac{4}{3}$

$=(a+1)^2+\frac{1}{3}>0$　となる

よって判別式が常に正であることから異なる2つの実根をもつ

(2)

$x^2+ax+b=0$ で　$b=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}$ より

$x^2+ax-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}=0$ としてこの方程式の2つの解を α,β とすると

$\alpha+\beta=-a$　　$\alpha\beta=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}$ となる

ここで

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-a)^2-4\left(-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\right)$

$=a^2+2a+\frac{4}{3}$

よって　$|\alpha-\beta|=\sqrt{a^2+2a+\frac{4}{3}}$

$=\sqrt{(a+1)^2+\frac{1}{3}}$　根号の中は常に正であり a はすべて実数

$\therefore\ \underline{|\alpha-\beta|\geq\frac{1}{\sqrt{3}}}$