2B 積分42

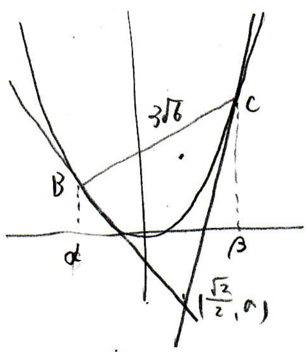
放物線 $y=x^2$ に点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, a\right)$ から 2 接線を引き，接点を B, C とする。線分 BC の長さが $3\sqrt{6}$ であるとき

(1) $a=$ $\boxed{}$ である。

(2) a が (1) で求めた値をとるとき，放物線と線分 BC とで囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である。

〔昭和薬科大〕

(1)



$y'=2x$　接点を (t, t^2) とすると

接線の式は

$y=2t(x-t)+t^2$ より

$y=2tx-t^2$ これが $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, a\right)$ を通るから

$a=\sqrt{2}t-t^2 \rightarrow t^2-\sqrt{2}t+a=0$ …①

① の方程式の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$\alpha+\beta=\sqrt{2}$，$\alpha\beta=a$ となり B の座標を $B(\alpha, \alpha^2)$ C の座標を $C(\beta, \beta^2)$ とすると

$BC=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}$ となり

(i) $\begin{cases} (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ \quad =(\sqrt{2})^2-4a=2-4a \\ (\alpha^2-\beta^2)^2=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 \\ \quad =2\cdot(2-4a)=4-8a \end{cases}$

右の (i) より

$BC=\sqrt{2-4a+4-8a}$

$=\sqrt{6-12a}=3\sqrt{6}$

$\therefore 6-12a=54$　$\therefore a=-4$

(2)

直線 BC は $y=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+\alpha^2$ より $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$ であるから

$y=\sqrt{2}x+4$ となり 求める面積 S は

$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta(\sqrt{2}x+4-x^2)dx=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)dx$

(2) の (i) より
$(\alpha-\beta)^2=18$
$\alpha-\beta=\pm3\sqrt{2}$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^2(\beta-\alpha)$

$=\dfrac{1}{6}\cdot18\cdot3\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}$