~~3C~~

2B 積分 #3

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 5x + 7, C_2 : y = x^2 + 3x - 1$ の両方に接する直線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C_1, C_2 と直線 l とで囲まれた図形の面積を求めよ。

〔工学院大〕

(1) $C_1 \; y' = 2x-5 \qquad C_2 \; y' = 2x+3$

C_1, C_2 の接点をそれぞれ $S(s, s^2-5s+7)$, $T(t, t^2+3t-1)$ とすると

接線の式は $y=(2s-5)(x-s)+s^2-5s+7$ となり $y=(2s+5)x - s^2+7 \cdots ①$

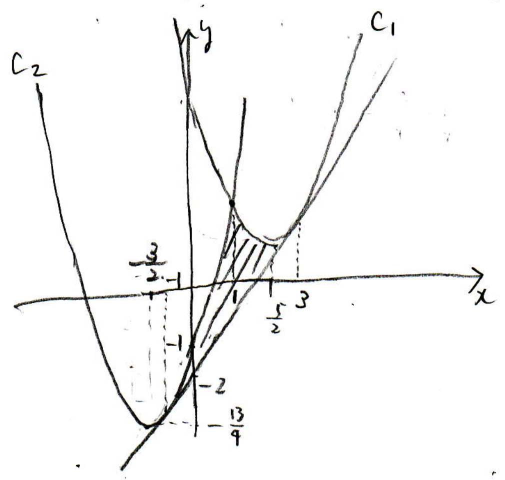
$y=(2t+3)(x-t)+t^2+3t-1$ となり $y=(2t+3)x-t^2-1 \cdots ②$ ①と②が一致するから

$2s-5=2t+3 \qquad s-t=4$

$-s^2+7=-t^2-1 \qquad s^2-t^2=8 \qquad (s+t)(s-t)=8 \qquad s+t=2$ より $\begin{cases} s-t=4 \\ s+t=2 \end{cases}$ $s=3, t=-1$

∴ 求める直線 l の式は $y=x-2$

(2) $C_1 : y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $C_2 : y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$



$x^2-5x+7=x^2+3x-1$ より

$-8x=-8 \qquad x=1$ で C_1, C_2 は交わる

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2+3x-1-x+2)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-5x+7-x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{16}{3}$$

$\frac{16}{3}$