

15 種分

関数 $f(x)$ はすべての x に対し

$$2f(x) = -6x^2 + 2 \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 x - k^2 + 3$$

を満たすとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) k を用いて, $\int_0^1 f(t) dt$ の値を表せ。

(2) $f(1) = 0$ となるような k の値をすべて求めよ。

(1) $\int_0^1 f(t) dt = a$ とおく

[千葉大]

$2f(x) = -6x^2 + 2a^2x - k^2 + 3$

両辺2倍すると

$$2 \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 2f(t) dt = 2a$$

$$\int_0^1 (-6t^2 + 2a^2t - k^2 + 3) dt = 2a$$

$$\left[-2t^3 + a^2t^2 + (-k^2 + 3)t \right]_0^1 = 2a$$

$$-2 + a^2 - k^2 + 3 = 2a$$

$$a^2 - 2a - k^2 + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 - k^2 = 0$$

$$a-1 = \pm k \quad \therefore a = 1 \pm k$$

従って $\int_0^1 f(t) dt = 1 \pm k$

(2) $f(x) = -3x^2 + (1 \pm k)^2 x + \frac{-k^2 + 3}{2}$ とし $x=1$ とおく

$$-3 + (1 \pm k)^2 + \frac{-k^2 + 3}{2} = 0$$

$$-6 + 2(1 \pm k)^2 - k^2 + 3 = 0$$

$$-6 + 2 \pm 4k + 2k^2 - k^2 + 3 = 0$$

$$k^2 \pm 4k - 1 = 0$$

$$(k \pm 2)^2 = 5 \quad \text{と解く}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{5}, \quad -2 \pm \sqrt{5}$$