2B 積分45

aを実数とし，$S(a)=\int_a^{a+1}|3x^2-6x|\,dx$ とおく。

(1) 関数 $y=|3x^2-6x|$ のグラフの概形をかけ。

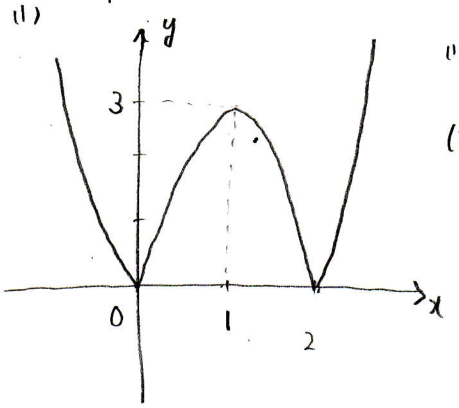
(2) $a \geqq 0$のとき，$S(a)$を求めよ。

(3) $a \geqq 1$のとき，$S(a)$の最小値とそのときのaの値を求めよ。

〔宮城教育大〕

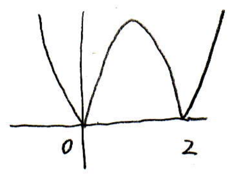
$f(x)=3x^2-6x=3(x^2-2x)=3(x-1)^2-3 \qquad f(x)=3x(x-2)$

(1)



(1) グラフは左のよう

(2)



i) $a+1 \leqq 2$ すなわち

$a \leqq 1$ のとき

$S(a)=\int_a^{a+1} -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_a^{a+1}$

$=-(a+1)^3+3(a+1)^2-(-a^3+3a^2)$

$=-(a^3+3a^2+3a+1)+3a^2+6a+3+a^3-3a^2$

$=-3a^2+3a+2$

ii) $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$S(a)=\int_a^2 -3x^2+6x\,dx+\int_2^{a+1} 3x^2-6x\,dx=\left[-x^3+3x^2\right]_a^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^{a+1}$

$=4-(-a^3+3a^2)+(a+1)^3-3(a+1)^2-(-4)$

$=4+a^3-3a^2+a^3+3a^2+3a+1-3a^2-6a-3+4$

$=2a^3-3a^2-3a+6$

iii) $a \geqq 2$ のとき

$S(a)=\int_a^{a+1} 3x^2-6x\,dx=\left[x^3-3x^2\right]_a^{a+1}=(a+1)^3-3(a+1)^2-(a^3-3a^2)$

$=\cancel{a^3}+\cancel{3a^2}+3a+1-\cancel{3a^2}-6a-3-\cancel{a^3}+3a^2 = 3a^2-3a-2$

(3) (2)のii)のとき

$S'(a)=6a^2-6a-3$

$=3(2a^2-2a-1)$

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+2}}{2}$

$\therefore a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ $1 \leqq a \leqq 2$より

$a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ で極値をとる

a	1	…	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	…	2
$S'(a)$		$-$		$+$	
$S(a)$		↘		↗	

$\alpha=a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき $S(\alpha)=2\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+6$

$=\underbrace{2\alpha^3-2\alpha^2-\alpha}_{0}-\alpha^2-2\alpha+6$

0にする(左下より)

$=-\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+6$

$=\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}+6=\dfrac{8-3\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ とすると $6\alpha^2-6\alpha-3=0$ で両辺α倍すると

$\therefore 6\alpha^3-6\alpha^2-3\alpha=0 \xrightarrow{\text{両辺3でわって}} 2\alpha^3-2\alpha^2-\alpha=0$

$S(\alpha)$を求めるときに利用

答 $\begin{cases} \therefore\ a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ のとき 最小値} \\ \dfrac{8-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$