数B 積分 46

a, b を実数とする。点 $(1, 1)$ を通り，直線 $x=2$ に関して対称である放物線

$$y=(-\cos\theta)x^2+ax+b\ \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) a, b を θ を用いて表せ。

(2) この放物線と x 軸により囲まれた図形の面積 $S(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(3) $S(\theta)$ の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

〔静岡大〕

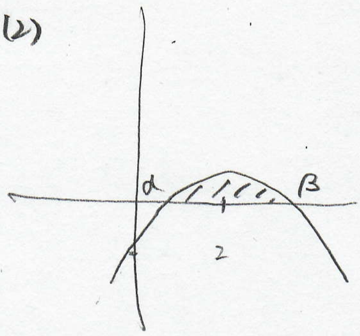
(1) $1=-\cos\theta+a+b$ …①

$y=-\cos\theta(x-2)^2+4\cos\theta+C$ ∵Cは定数

$=-\cos\theta x^2+4\cos\theta x+C$

∴ $a=4\cos\theta$ ①より $b=1-3\cos\theta$

(2)



(1)より整理すると

$y=(-\cos\theta)x^2+4(\cos\theta)x+1-3\cos\theta$ となり 右辺$=0$として

方程式を解くと $x=\dfrac{-4\cos\theta\pm\sqrt{16\cos^2\theta+4\cos\theta(1-3\cos\theta)}}{-2\cos\theta}$

$=\dfrac{-4\cos\theta\pm2\sqrt{\cos^2\theta+\cos\theta}}{-2\cos\theta}$

∴ $x=\dfrac{2\cos\theta\pm2\sqrt{\cos^2\theta+\cos\theta}}{\cos\theta}$

$S(\theta)=\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,dx=\frac{\cos\theta}{6}(\beta-\alpha)^3$ $\left(∵\ \beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{\cos^2+\cos\theta}}{\cos\theta}=2\sqrt{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta}{6}8\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}\right)^3=\dfrac{4}{3}\sqrt{(\cos\theta)\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^3}=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(\cos\theta+1)^3}{\cos\theta}}$

∴ $S(\theta)=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(\cos\theta+1)^3}{\cos\theta}}$

(3) $\cos\theta=t$ とおいて $f(t)=\dfrac{(t+1)^3}{t}$ を考える ∵ $0<t\leqq1$

$f'(t)=\dfrac{3(t+1)^2t-(t+1)^3}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2\{3t-(t+1)\}}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}$

tの範囲より $t=\frac{1}{2}$ のとき極値をもつ

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(t)$	/	−		+	
$f(t)$	/	↘		↗	8

増減表を書くと左のようになり

$t=\frac{1}{2}$ のとき極小値をとる このとき $\cos\theta=\frac{1}{2}$ で

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$