ⅡB 積分47

次の各問に答えよ。

(1) $\alpha < \beta$ のとき, 次の等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを示せ。

(2) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき, 曲線 $y=(3x-a^3)(x-a+1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

〔宮崎大〕

(1)

$$-\int_\alpha^\beta (x-\beta)(x-\alpha)\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha+\alpha-\beta)(x-\alpha)\,dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx - \int_\alpha^\beta (\alpha-\beta)(x-\alpha)\,dx$$

$x-\alpha=t$ とおくと
$dx=dt$
$x: \alpha \to \beta$
$t: 0 \to \beta-\alpha$

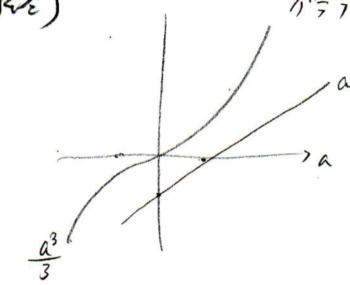
$$= -\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta + \int_0^{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)t\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 + \left[\frac{1}{2}(\beta-\alpha)t^2\right]_0^{\beta-\alpha}$$

$$= -\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$ ∴ (証明終)

グラフより $\frac{a^3}{3} > a-1$



(2)

x 軸との交点は $x=\frac{a^3}{3}$, $a-1$

(1)より $S(a) = \frac{3}{6}\left(\frac{a^3}{3}-a+1\right)^3$

$$S(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}(a^3-3a+3)^3 = \frac{1}{54}(a^3-3a+3)^3$$

このとき最小値を考えるのに a^3-3a+3 の最小を考えれば十分であるから

$f(a)=a^3-3a+3$ として

$f'(a)=3a^2-3$
$=3(a+1)(a-1)$

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	↗	5	↘	1	↗	5

$f(a)>0$ ($\because -2 \leqq a \leqq 2$)

よって $a=-2, 1$ のとき極小値1をとる

このとき $S(a)=\frac{1}{54}$

∴ $S(a)$ の最小値は $\frac{1}{54}$