ⅡB 積分48

2つの関数 $y=1-x^2, y=\frac{1}{2}(x-b)^2$ のグラフが, 点 $\mathrm{A}(a, 1-a^2)$ において同一の直線に接するように, 正の定数 a, b を定める。関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & (x \leqq a) \\ \frac{1}{2}(x-b)^2 & (x > a) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a, b の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

〔大阪市立大〕

(1) 接するということは2つの関数を等式として

$1-x^2=\frac{1}{2}(x-b)^2$ の方程式が重解をもつということ

$2-2x^2=x^2-2bx+b^2$

$3x^2-2bx+b^2-2=0$ → 判別式 $D/4=0$ とすると

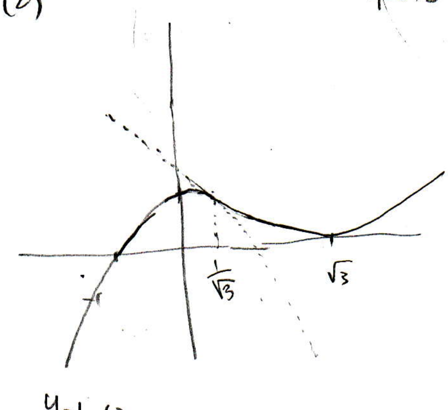
$b^2-3(b^2-2)=0$

$2b^2=6$ $b^2=\pm\sqrt{3}$ $b>0$ より $\underline{b=\sqrt{3}}$

このとき上の方程式は $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

$(\sqrt{3}x-1)^2=0$ ∴ $x=a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ $\underline{a=\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)



求める面積Sは $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ として

$$S=\int_{-1}^{\alpha} 1-x^2\,dx+\int_{\alpha}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}(x-\sqrt{3})^2\,dx$$

$x^2-2\sqrt{3}x+3$

$$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\sqrt{3}x^2+3x\right]_{\alpha}^{\sqrt{3}}$$

$$=\left(\alpha-\frac{1}{3}\alpha^3\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left\{(\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{3})-\left(\frac{1}{3}\alpha^3-\sqrt{3}\alpha^2+3\alpha\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{19}{27}\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{27}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{19}{54}\sqrt{3}$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{54}+\frac{2}{3}+\frac{27\sqrt{3}}{54}-\frac{19\sqrt{3}}{54}$$

$$=\frac{4}{9}\sqrt{3}+\frac{2}{3}$$

$\underline{\frac{4}{9}\sqrt{3}+\frac{2}{3}}$

計算ミス多かった