エち 積分 49

k は定数で $0<k<12$ とする。放物線 $y=ax^2+bx+c$ は点 $(6k,0)$ と点 A$\left(3k, 18k-\frac{3}{2}k^2\right)$ を通り，点 A における接線の傾きは 0 であるという。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) k を用いて a,b,c を表すと $a=\dfrac{\boxed{}-\boxed{}}{\boxed{}}$, $b=\boxed{}-\boxed{}$, $c=\boxed{}$ である。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸で囲まれる図形の面積 S は $S=\boxed{}k^3+\boxed{}k^2$ である。

(3) k が $0<k<12$ を動くとき面積 S は $k=\boxed{}$ で最大となる。

〔東北薬科大〕

(1)

$36k^2a+6kb+c=0$ …①

$9k^2a+3kb+c=18k-\frac{3}{2}k^2$ …②

$y'=2ax+b$ より　$6ka+b=0$ …③

①−② より

$27k^2a+3kb=-18k+\frac{3}{2}k^2$

④，③ より

$27k^2a-18k^2a=-18k+\frac{3}{2}k^2$

$9k^2a=-18k+\frac{3}{2}k^2$

$k>0$ より

$a=\dfrac{k-12}{6k}$ これより

$b=\dfrac{-6k(k-12)}{6k}=12-k$

① より　$6k(\underbrace{6ka+b}_{\text{③より }0})+c=0$　$\therefore c=0$

$a=\dfrac{k-12}{6k}$, $b=12-k$, $c=0$ //

(2) $y=\dfrac{k-12}{6k}x^2+(12-k)x=\dfrac{k-12}{6k}x(x-6k)$

∴ x 軸との交点は　0，$6k$　求める面積は

$S=\int_0^{6k}\dfrac{k-12}{6k}x(x-6k)\,dx=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\dfrac{k-12}{6k}\right|(6k)^3$　$0<k<12$ より $12-k>0$

$=6k^2(12-k)$　$\therefore S=-6k^3+72k^2$

(3) $S'=-18k^2+144k$

$=-18k(k-8)$

となり増減を調べると

k	(0)	…	8	…	(12)
S'		+	0	−	
S	(0)	↗	極大	↘	(0)

∴ $k=8$ のとき 最大となる //