重B 積分50

$1 < a < 2,\ f(x) = x(x-2)^2$ とする。曲線 $y = f(x)\ (a \leqq x \leqq 2a)$ と x 軸および 2 直線 $x = a,\ x = 2a$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を $S(a)$ とおく。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

〔大同工業大〕

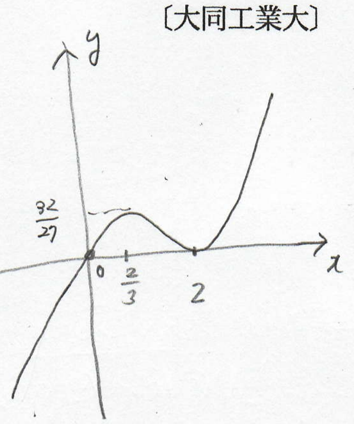
(1) $f'(x) = (x-2)^2 + x \cdot 2(x-2)$

$= (x-2)\{(x-2)+2x\} = (x-2)(3x-2)$

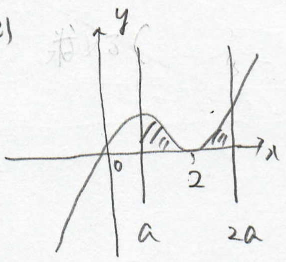
x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$ …極大値

$f(2) = 0$ …極小値



(2)



$S(a) = \int_a^2 x(x-2)^2 dx + \int_2^{2a} x(x-2)^2 dx$

ここで $x(x-2)^2 = x(x^2-4x+4) = x^3-4x^2+4x$ だから

$S(a) = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_a^2 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\right]_2^{2a}$

$= \cancel{\left(4 - \frac{32}{3} + 8\right)} - \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{4}{3}a^3 + 2a^2\right) + \left(4a^4 - \frac{32}{3}a^3 + 8a^2\right) - \cancel{\left(4 - \frac{32}{3} + 8\right)}$

$= \frac{15}{4}a^4 - \frac{28}{3}a^3 + 6a^2$　　$\therefore S(a) = \frac{15}{4}a^4 - \frac{28}{3}a^3 + 6a^2$

(3) $S'(a) = 15a^3 - 28a^2 + 12a = a(5a-6)(3a-2)$

$\therefore S(a)$ は $0,\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$ で極値をとる　$1<a<2$ でそれを考えると右下のような増減表になり、

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$S(a)$ は $a = \frac{6}{5}$ のとき最小値0になる