積分51

xy 平面上において, 曲線 C を $y=|x^2+2x-3|$, 直線 l を点 $(-3,0)$ を通る傾き m の直線とする。

(1) C と l が点 $(-3,0)$ 以外の異なる2点で交わるための m の値の範囲は $\boxed{} < m < \boxed{}$ である。

(2) (1) の m の値の範囲において, C と l で囲まれる図形の面積 S を m の式で表すと

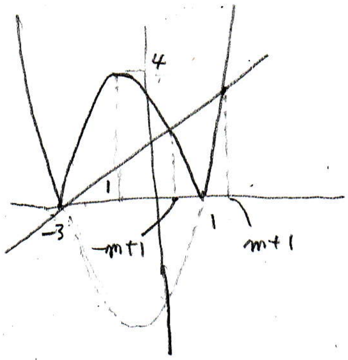
$$S=-\frac{\boxed{}}{\boxed{}}m^3+\boxed{}m^2-\boxed{}m+\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

である。

(3) (1) の m の値の範囲において, 面積 S が最小となるときの m の値は $m=\boxed{}-\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である。

〔慶応大〕

$y=(x+1)^2-4$　　$y=(x+3)(x-1)$

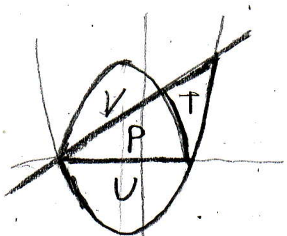


(1)
点 $(-3,0)$ における接線の傾きは
$y=-x^2-2x+3$ を微分して $y'=-2x-2$
$x=-3$ より 4　∴ $0<m<4$

(2)
$l: y=m(x+3)$ としてグラフの交点を求めてみる

$x^2+2x-3=mx+3m$　　$-x^2-2x+3=mx+3m$
$x^2+(2-m)x-3-3m=0$　　$x^2+(2+m)+3m-3=0$
$(x+3)(x-1-m)=0$　　$(x+3)(x+m-1)=0$

よって -3 以外の交点の x 座標は $-m+1$, $m+1$ となる



右図で $P+T+V=S_1$, $V=S_2$ とすると
$T=S_1-P-V$　$P=U-V$ より $T=S_1-(U-V)-U=S_1-2U+V$
∴求める面積 S は $T+V=S_1-2U+V+V=S_1-2U+2V$ より

$$S=\int_{-3}^{m+1}(mx+3m-x^2-2x-3)\,dx-2\int_{-3}^{1}(-x^2-2x-3)\,dx+2\int_{-3}^{-m+1}(-x^2-2x-3-mx-3m)\,dx$$

$$=-\int_{-3}^{m+1}(x+3)(x-1-m)\,dx+2\int_{-3}^{1}(x-1)(x+3)\,dx-2\int_{-3}^{-m+1}(x+3)(x+m-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(m+4)^3-\frac{2}{6}(1+3)^3+\frac{2}{6}(-m+4)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{m^3+12m^2+48m+64-128+2(-m^3+12m^2-48m+64)\}$$

$$=\frac{1}{6}(-m^3+36m^2-48m+64)$$

∴ $S=-\frac{1}{6}m^3+6m^2-8m+\frac{32}{3}$

(3)
$S'=-\frac{1}{2}m^2+12m-8$
$=-\frac{1}{2}(m^2-24m+16)$
$S'=0$ として
$(m-12)^2-144+16=0$
$(m-12)^2=128$
$m=12\pm8\sqrt{2}$　$0<m<4$
より $m=12-8\sqrt{2}$
増減表をかくと

m	0	…	$12-8\sqrt{2}$	…	4
S'		−	0	+	
S		↘	最小	↗	

∴ $m=12-8\sqrt{2}$