放物線 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x+9$ 上の動点 P と 2 定点 A$(1,-1)$, B$(2,1)$ を考える。つぎの問いに答えよ。

(1) 3 点 A, B, P が一直線上に並ぶときの P の座標を求めよ。

(2) 3 点 A, B, P を頂点とする三角形の重心の軌跡を求めよ。

(3) この重心の軌跡と 2 点 A, B を通る直線で囲まれた領域を D とする。直線 $y=x+k$ が領域 D と共有点をもつとき, k の最大値を求めよ。

〔法政大〕

(1) 点 $P(t,\ -\frac{1}{3}t^2+2t+9)$ とするとき

直線AB上に点Pは存在するので 直線AB $y=2x-3$ に点Pを代入すると

$-\frac{1}{3}t^2+2t+9=2t-3$ $\quad -\frac{1}{3}t^2=-12$ $\quad t^2=36$ $\quad t=\pm 6$

$\therefore$ $(-6,-15)$, $(6,9)$

(2) 重心の座標を (x, y) とすると (1)の P の座標を用いて表すと

$$x=\frac{1+2+t}{3}=\frac{3+t}{3} \quad \cdots ①$$

$$y=\left(-1+1-\frac{1}{3}t^2+2t+9\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}t^2+2t+9\right) \quad \cdots ②$$

① より $t=3x-3$ を ② に代入すると

$$y=\frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}\cdot 9(x-1)^2+2(3x-3)+9\right\}$$

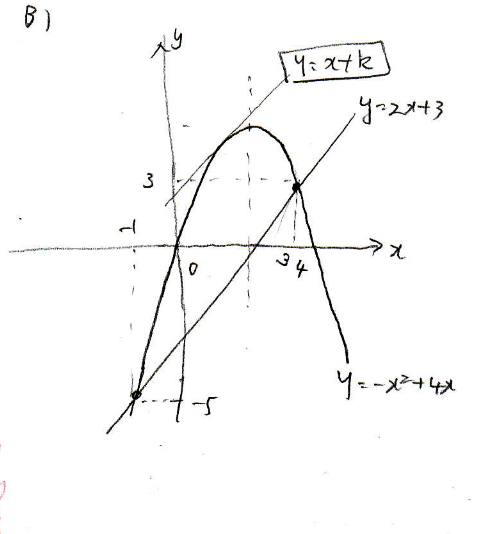
$$=-(x-1)^2+2(x-1)+3$$

$$=-x^2+2x-1+2x-2+3$$

$y=-x^2+4x$ $\quad \because (3,3)\ (-1,-5)$ は除く

$\because$ 点Pが直線AB上にあると三角形はできないので $-x^2+4x=2x-3$ より $(x-3)(x+1)=0$

(3)



最大は接するとき $y'=-2x+4$ で 接点を $(p,\ -p^2+4p)$ とすると

接線の傾きは $-2p+4$ これが 1 と等しいので

$-2p+4=1$ $\quad p=\frac{3}{2}$, つまり接点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ このとき最大になる

$\therefore$ $k=y-x$ より

$$=\frac{15}{4}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

$\frac{9}{4}$