3次関数 $f(x)=3x^3,\ g(x)=3(x-a)^3+a$ を考える。a は正の数である。

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が異なる2点で交わるような a の値の範囲は $0<a<\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$

である。

(2) a の値が (1) の範囲にあるとき, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ によって囲まれる部分の面積を S とおく。

$$S=\frac{a}{18}\left(\boxed{}a^2+\boxed{}\right)^{\frac{3}{2}}$$

である。

(3) S は $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ のとき, 最大値 $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ をとる。

上智大 〔~~法政大~~〕

(1) $3x^3=3(x-a)^3+a$

$3x^3=3(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)+a$

$9ax^2-9a^2x+3a^3-a=0$ この方程式が異なる2つの実数解をもてばよいので

$81a^4-36a(3a^3-a)>0$

$-27a^4+36a^2>0$

$\underbrace{9a^2}_{9a^2>0}(3a^2-4)<0$ → $3a^2<4$

$\therefore -\frac{2}{\sqrt{3}}<a<\frac{2}{\sqrt{3}}$ であるが $a<0$ より　$\underline{0<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

(2) $f(x)-g(x)=0$ の解を α,β とおくと $\alpha<\beta$

$S=\int_\alpha^\beta \{3(x-a)^3+a-3x^3\}dx=\int_\alpha^\beta 9a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{9a}{6}(\beta-\alpha)^3$ …①

α,β は $x=\frac{9a^2\pm\sqrt{81a^4-36a(3a^3-a)}}{18a}$ より ①は $\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{3a\sqrt{4-3a^2}}{9a}\right)^3=\frac{3a}{2}\left(\frac{\sqrt{4-3a^2}}{3}\right)^3$

$\therefore \underline{S=\frac{a}{18}(-3a^2+4)^{\frac{3}{2}}}$ …②

(3) (2)の②より $S=\frac{1}{18}(-3a^{\frac{8}{3}}+4a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ これの最大値を知るには $S(a)=-3a^{\frac{8}{3}}+4a^{\frac{2}{3}}$ の最大値を知らべれば十分である $S'(a)=-8a^{\frac{5}{3}}+\frac{8}{3}a^{-\frac{1}{3}}=-8a^{-\frac{1}{3}}(a^2-\frac{1}{3})$

$a>0$ より $S'(a)=0$ としたとき $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極値をとる

a	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…
$S'(a)$	+	0	−
$S(a)$	↗	極大	↘

よって $S(a)$ は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値をとる つまり S の最大値は $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のときで その値は

$S=\frac{1}{18\sqrt{3}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{18\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{3}=\frac{1}{6}$　　$\underline{\frac{1}{6}\ (a=\frac{1}{\sqrt{3}})}$