積分56

aを定数とする2つの曲線 $y = x^3 - x + a$, $y = x^2$ は, 第1象限内の1点で接線を共有する。次の問いに答えよ。

(1) $a = \boxed{1}$ である。

(2) 共通な接線の方程式は $y = \boxed{2}x + \boxed{-1}$ であり, 接点の座標は $\left(\boxed{1}, \boxed{1}\right)$ である。

(3) 2つの曲線のもう1つの共有点の座標は $\left(\boxed{-1}, \boxed{1}\right)$ である。

(4) 2つの曲線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ である。

〔東京薬科大改〕

(1) $f(x) = x^3 - x + a$　$f'(x) = 3x^2 - 1$

$g(x) = x^2$　$g'(x) = 2x$

接点のx座標をtとすると　$3t^2 - 1 = 2t$

$3t^2 - 2t - 1 = 0 \rightarrow (3t+1)(t-1) = 0$

$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ 3 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} -3 \\ \underline{1} \\ -2 \end{array}$

より $t = -\frac{1}{3}, 1$, $t > 0$ より $t = 1$　接点は $(1, 1)$

このとき $f(1) = 1$ であるから $\underline{a = 1}$

(2) 接点が $(1, 1)$, $g'(x) = 2x$ より 接線の式は $y = 2(x-1)+1$

$\therefore$ $\underline{y = 2x - 1}$　$\underline{\text{接点は} (1, 1)}$

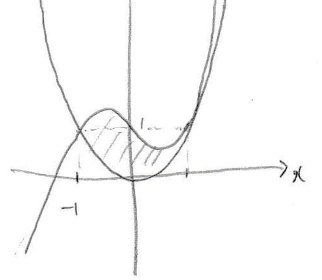
(3) $x^3 - x + 1 = x^2$ より

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$(x-1)^2(x+1) = 0$

$\therefore$ $\underline{\text{もう1つの共有点は} (-1, 1)}$

(4)



$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 - x + 1 - x^2 \, dx = 2\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \underline{\dfrac{4}{3}}$