積分57

曲線 $y=x^2-4x$ を y 軸方向に平行移動してできる曲線 C_1, および x 軸方向に平行移動してできる曲線 C_2 はいずれも直線 $y=2x+1$ に接するという。このとき, 次の問いに答えよ。

$x(x-4)$

(1) 曲線 $y=x^2-4x$ の接線のうち, 直線 $y=2x+1$ に平行なものの方程式を求めよ。

(2) C_1 および C_2 の方程式を求めよ。

(3) C_1, C_2 および直線 $y=2x+1$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

〔東邦大〕

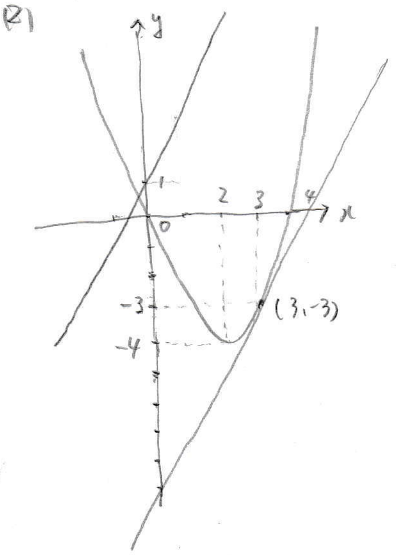
(1) $y'=2x-4$ 接点を (t, t^2-4t) とすると傾きは

$2t-4$ となりこれが $y=2x+1$ と平行より, $2t-4=2$ $t=3$

となるので 接点は $(3, -3)$ となる. これより 接線の式は

$y=2(x-3)-3$ つまり $\underline{y=2x-9}$

(2)



$x^2-4x=2x-9$ とおくと

$x^2-6x+9=0$ となり $(x-3)^2=0$ より (1) での接点は $(3, -3)$ となる

これより C_1 と $y=2x+1$ の接点Pは $x=3$ となり $(3, 7)$

C_1 を $y=x^2-4x+c$ とすると $P(3, 7)$ を通ることより y 軸方向に 10 平行移動すればよい.

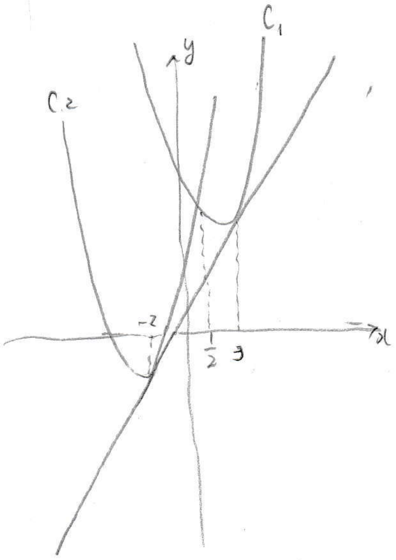
$\therefore C_1$: $\underline{y=x^2-4x+10}$

また C_2 と $y=2x+1$ との接点Qは $y=-3$ より $Q(-2, -3)$

C_2 を $y=x^2-4x+d$ とすると $Q(-2, -3)$ を通ることより C_2 は x 軸の方向に -5 平行移動すればよい

$\therefore C_2$: $y=(x+5)^2-4(x+5)$

つまり $\underline{C_2 : y=x^2+6x+5}$



(3) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めると $\frac{1}{2}$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x^2+6x+5-2x-1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x^2-4x+10-2x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{24}-\frac{3}{4}+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{61}{24}+\frac{8}{3}+9-\frac{91}{24}$$

$$=\frac{250}{24}$$

$$=\frac{125}{12}$$

$\therefore \underline{\frac{125}{12}}$