IIBセオ/659　1/2

a, b を定数とする。関数

$$f(x) = \int_0^x (t-a)(t-b)\,dt$$

は次の 3 つの条件を満たす。

(i) $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ において極値をとる。

(ii) $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{6}$

(iii) $f'(0) > 0$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求め, グラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ の原点 (0, 0) における接線とこの曲線とで囲まれる部分の面積を求めよ。ただし, $\int x^3\,dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ である。

〔中央大〕

(1) $f(x) = \int_0^x (t^2 - (a+b)t + ab)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}(a+b)t^2 + abt\right]_0^x$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+b)x^2 + abx$

(i)より $f'(x) = (x-a)(x-b)$ であるから $f'(\frac{1}{2}) = 0$ つまり

$(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b) = 0$ で $a = \frac{1}{2}$ 又は $b = \frac{1}{2}$ である …①

(iii)より $ab > 0$

(ii)から $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}(a+b)a^2 + a^2b - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}(a+b)b^2 - ab^2$

$= \frac{1}{3}(a-b)(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{2}(a+b)^2(a-b) + ab(a-b)$

$= \frac{1}{6}(a-b)\{2(a^2+ab+b^2) - 3(a+b)^2 + 6ab\}$

$= \frac{1}{6}(a-b) \cdot -(a-b)^2$

$= -\frac{1}{6}(a-b)^3$

題意より $-\frac{1}{6}(a-b)^3 = \frac{1}{6}$ ∴ $(a-b)^3 = -1$ a, b は実数なので

$a - b = -1$ ①より $a = \frac{1}{2}$ のとき $b = \frac{3}{2}$ $b = \frac{1}{2}$ のとき $a = -\frac{1}{2}$ $ab > 0$ より

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

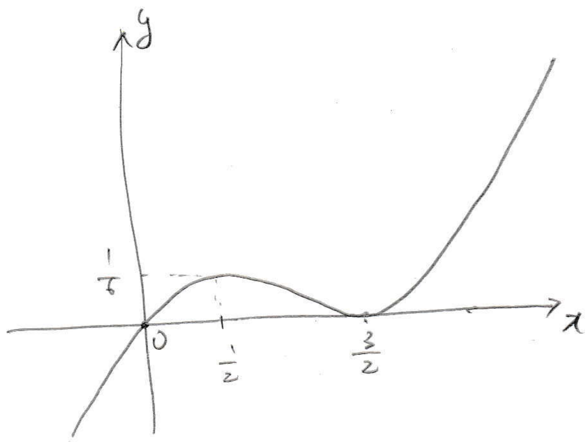
∴ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x$

(2)

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{3}{4}x$

$f'(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ より

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	0	↗



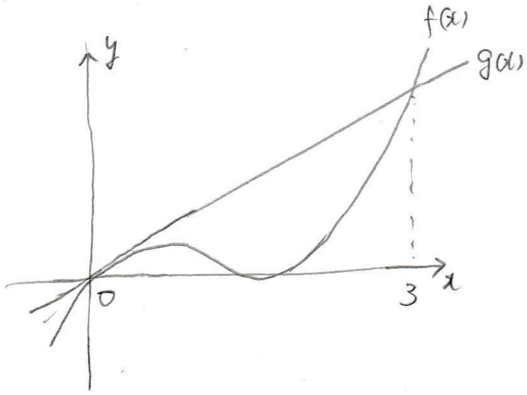
$x=\frac{1}{2}$のとき 極大値$\frac{1}{6}$

$x=\frac{3}{2}$のとき 極小値 0

(3)

$f'(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ より $f'(0)=\frac{3}{4}$

∴ 原点における接線は $y=\frac{3}{4}x$



$g(x)=\frac{3}{4}x$ とおいて 交点を求めると

$f(x)=g(x)$ より

$\frac{1}{3}x^3-x^2=0$

$\frac{1}{3}x^2(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

∴ 求める面積Sは

$S=\int_0^3\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{3}{4}x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=-\frac{27}{4}+9$

$=\frac{9}{4}$ //